IV Matematyczne Igrzyska Dolnej Wisły

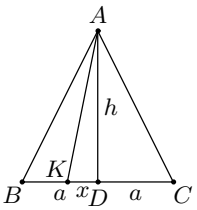
Grudziądz 18 października 2003 roku

Szkice rozwiązań

Zadanie 1. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Wykaż, że dla dowolnego punktu K leżącego na podstawie BC tego trójkąta zachodzi równość

$$|AB|^2 = |AK|^2 + |BK| \cdot |CK|.$$

Rozwiązanie. Niech D będzie środkiem odcinka BC. Wprowadźmy oznaczenia:



$|BD| = |CD| = a$, $|AD| = h$, $|DK| = x$.

Jeśli punkt K leży na odcinku BD, to $|BK| = a - x$, $|CK| = a + x$, a jeśli leży na odcinku CD, to $|BK| = a + x$, $|CK| = a - x$. W obu przypadkach

$$|BK| \cdot |CK| = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 = h^2 + a^2$$

oraz

$$|AK|^2 = |AD|^2 + |DK|^2 = h^2 + x^2.$$

Zatem

$$|AK|^2 + |BK| \cdot |CK| = h^2 + x^2 + a^2 - x^2 = h^2 + a^2 = |AB|^2.$$

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} xy + z = t \\ yz + t = x + 1 \\ zt + x = y + 2 \\ tx + y = z - 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Załóżmy, że liczby x, y, z, t spełniają dany układ równań. Dodając stronami wszystkie równania, otrzymujemy

$$xy + yz + zt + tx + z + t + x + y = t + x + y + z,$$

skąd

$$xy + yz + zt + tx = 0,$$

czyli

$$(x + z)(y + t) = 0.$$

Zatem $x + z = 0$ lub $y + t = 0$. Rozważymy oba przypadki.

1) Załóżmy, że $x + z = 0$. Dodając stronami pierwsze dwa równania, otrzymujemy

$$xy + yz + z + t = t + x + 1,$$

skąd $y(x + z) + z = x + 1$, czyli $z = x + 1$.

Z układu równań $x + z = 0$ i $z = x + 1$ dostajemy $x = -\frac{1}{2}$ i $z = \frac{1}{2}$. Podstawiamy te wartości do pierwszego i trzeciego równania. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = t \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = y + 2, \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} y + 2t = 1 \\ 2y - t = -5, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $y = -\frac{9}{5}$, $t = \frac{7}{5}$.

2) Załóżmy teraz, że $y + t = 0$. Dodając stronami drugie i trzecie równanie, otrzymujemy

$$yz + zt + t + x = x + y + 3,$$

skąd $z(y + t) + t = y + 3$, czyli $t = y + 3$.

Z układu równań $y + t = 0$ i $t = y + 3$ dostajemy $y = -\frac{3}{2}$ i $t = \frac{3}{2}$. Podstawiamy te wartości do pierwszego i trzeciego równania. Dostajemy układ równań

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x + z = \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}z + x = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} -3x + 2z = 3 \\ 3z + 2x = 1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $x = -\frac{7}{13}$, $z = \frac{9}{13}$.

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania:

$$(x, y, z, t) = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{9}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{5}),\ (-\tfrac{7}{13}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{13}, \tfrac{3}{2}).$$

Na koniec sprawdzamy, że otrzymane rozwiązania rzeczywiście spełniają dany układ równań.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich k, l, m o tej własności, że liczba k^k ma (w zapisie dziesiętnym) l cyfr, liczba l^l ma m cyfr, a liczba m^m ma k cyfr.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że liczba 1^1 ma 1 cyfrę, liczba 2^2 ma 1 cyfrę, liczba 3^3 ma 2 cyfry, liczba 4^4 ma 3 cyfry, liczba 5^5 ma 4 cyfry, liczba 6^6 ma 5 cyfr, liczba 7^7 ma 6 cyfr, liczba 8^8 ma 8 cyfr, liczba 9^9 ma 9 cyfr, a liczba 10^{10} ma 11 cyfr.

Załóżmy, że liczby k, l, m spełniają warunki zadania. Jeśli $k \geqslant 10$, to $k^k \geqslant 10^k$, więc k^k ma co najmniej $k + 1$ cyfr, czyli $l > k$. Wówczas analogicznie $m > l$ (gdyż $l \geqslant 10$) oraz $k > m$ (gdyż $m \geqslant 10$), co jest niemożliwe.

Zatem $k \leqslant 9$. Gdy $2 \leqslant k \leqslant 7$, to patrząc na odpowiednie liczby cyfr, otrzymujemy nierówności $l < k$, $m \leqslant l$ i $k \leqslant m$, co jest niemożliwe.

Zostaje jedynie $k = 1, 8, 9$ i wówczas $l = k$ oraz $m = l$, czyli mamy trzy możliwości:

$$(k, l, m) = (1, 1, 1),\ (8, 8, 8),\ (9, 9, 9).$$

Zadanie 4. W polach kwadratowej tablicy 5×5 ustaw liczby:

11,	12,	13,	14,	15,
21,	22,	23,	24,	25,
31,	32,	33,	34,	35,
41,	42,	43,	44,	45,
51,	52,	53,	54,	55

(po jednej liczbie w każdym polu) w ten sposób, by w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie były liczby o pięciu różnych cyfrach dziesiątek i pięciu różnych cyfrach jedności.

Rozwiązanie. Cyfry dziesiątek ustawiamy na przykład tak:

1				
	1			
		1		
			1	
				1

	2			
		2		
			2	
				2
2				

		3		
			3	
				3
3				
	3			

			4	
				4
4				
	4			
		4		

				5
5				
	5			
		5		
			5	

Cyfry jedności ustawiamy na przykład tak:

				1
			1	
		1		
	1			
1				

2				
				2
			2	
		2		
	2			

	3			
3				
				3
			3	
		3		

		4		
	4			
4				
				4
			4	

			5	
		5		
	5			
5				
				5