

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

3 XI

rok 2005/2006

*Bukiet 1*

Dane są liczby rzeczywiste  $x, y, z$  takie, że  $x + y + z = 0$ . Niech  $a = -(xy + yz + zx)$  i  $b = xyz$ .

1. Zauważ, że liczby  $x, y, z$  spełniają równania (z niewiadomą  $t$ ):

a)  $(t - x)(t - y)(t - z) = 0$ ,

b)  $t^3 = at + b$ .

2. Dla  $n = 1, 2, 3, \dots$  określmy  $S_n = x^n + y^n + z^n$  i przyjmijmy  $S_0 = 3$ .

a) Pokaż, że  $S_2 = 2a$ .

b) Udowodnij, że dla  $n \geq 3$  zachodzi wzór

$$S_n = aS_{n-2} + bS_{n-3}.$$

c) Mając dane  $a$  i  $b$ , oblicz  $S_n$  dla  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ .

3. Udowodnij, że:

a) 
$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} = \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5},$$

b) 
$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7},$$

c) 
$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7} = \frac{x^9 + y^9 + z^9}{9} - \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^3}{81}.$$