Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

3 XI | rok 2005/2006 | *Bukiet 1*

Dane są liczby rzeczywiste x, y, z takie, że $x + y + z = 0$. Niech $a = -(xy + yz + zx)$ i $b = xyz$.

1. Zauważ, że liczby x, y, z spełniają równania (z niewiadomą t):
a) $(t - x)(t - y)(t - z) = 0$,
b) $t^3 = at + b$.

2. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ określmy $S_n = x^n + y^n + z^n$ i przyjmijmy $S_0 = 3$.
a) Pokaż, że $S_2 = 2a$.
b) Udowodnij, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi wzór

$$S_n = aS_{n-2} + bS_{n-3}.$$

c) Mając dane a i b, oblicz S_n dla $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

3. Udowodnij, że:

a) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{3} = \frac{x^5+y^5+z^5}{5},$$

b) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^5+y^5+z^5}{5} = \frac{x^7+y^7+z^7}{7},$$

c) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^7+y^7+z^7}{7} = \\ = \frac{x^9+y^9+z^9}{9} - \frac{(x^3+y^3+z^3)^3}{81}.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

3 XI | rok 2005/2006 | *Bukiet 1*

Dane są liczby rzeczywiste x, y, z takie, że $x + y + z = 0$. Niech $a = -(xy + yz + zx)$ i $b = xyz$.

1. Zauważ, że liczby x, y, z spełniają równania (z niewiadomą t):
a) $(t - x)(t - y)(t - z) = 0$,
b) $t^3 = at + b$.

2. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ określmy $S_n = x^n + y^n + z^n$ i przyjmijmy $S_0 = 3$.
a) Pokaż, że $S_2 = 2a$.
b) Udowodnij, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi wzór

$$S_n = aS_{n-2} + bS_{n-3}.$$

c) Mając dane a i b, oblicz S_n dla $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

3. Udowodnij, że:

a) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{3} = \frac{x^5+y^5+z^5}{5},$$

b) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^5+y^5+z^5}{5} = \frac{x^7+y^7+z^7}{7},$$

c) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^7+y^7+z^7}{7} = \\ = \frac{x^9+y^9+z^9}{9} - \frac{(x^3+y^3+z^3)^3}{81}.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

3 XI | rok 2005/2006 | *Bukiet 1*

Dane są liczby rzeczywiste x, y, z takie, że $x + y + z = 0$. Niech $a = -(xy + yz + zx)$ i $b = xyz$.

1. Zauważ, że liczby x, y, z spełniają równania (z niewiadomą t):
a) $(t - x)(t - y)(t - z) = 0$,
b) $t^3 = at + b$.

2. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ określmy $S_n = x^n + y^n + z^n$ i przyjmijmy $S_0 = 3$.
a) Pokaż, że $S_2 = 2a$.
b) Udowodnij, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi wzór

$$S_n = aS_{n-2} + bS_{n-3}.$$

c) Mając dane a i b, oblicz S_n dla $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

3. Udowodnij, że:

a) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{3} = \frac{x^5+y^5+z^5}{5},$$

b) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^5+y^5+z^5}{5} = \frac{x^7+y^7+z^7}{7},$$

c) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^7+y^7+z^7}{7} = \\ = \frac{x^9+y^9+z^9}{9} - \frac{(x^3+y^3+z^3)^3}{81}.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

3 XI | rok 2005/2006 | *Bukiet 1*

Dane są liczby rzeczywiste x, y, z takie, że $x + y + z = 0$. Niech $a = -(xy + yz + zx)$ i $b = xyz$.

1. Zauważ, że liczby x, y, z spełniają równania (z niewiadomą t):
a) $(t - x)(t - y)(t - z) = 0$,
b) $t^3 = at + b$.

2. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ określmy $S_n = x^n + y^n + z^n$ i przyjmijmy $S_0 = 3$.
a) Pokaż, że $S_2 = 2a$.
b) Udowodnij, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi wzór

$$S_n = aS_{n-2} + bS_{n-3}.$$

c) Mając dane a i b, oblicz S_n dla $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

3. Udowodnij, że:

a) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{3} = \frac{x^5+y^5+z^5}{5},$$

b) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^5+y^5+z^5}{5} = \frac{x^7+y^7+z^7}{7},$$

c) $$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^7+y^7+z^7}{7} = \\ = \frac{x^9+y^9+z^9}{9} - \frac{(x^3+y^3+z^3)^3}{81}.$$