

INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE 2004/2005

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw IV (5 XII)

Zadanie 1. Wyznacz, w zależności od parametrów a i b , liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b. \end{cases}$$

Zadanie 2. Dane są liczby całkowite a , b , c takie, że $a + b$ jest podzielne przez c , a c jest podzielne przez 3. Wykaż, że $a^3 + b^3$ jest podzielne przez $3c$.

Zadanie 3. Udowodnij, że w trójkącie prostokątnym środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego jest równa połowie przeciwprostokątnej.

Zadanie 4. Wiadomo, że dwa spośród poniższych zdań o liczbie naturalnej m są prawdziwe, a jedno fałszywe:

- a) m jest czwartą potęgą liczby naturalnej,
- b) $m + 1$ jest podzielne przez 3,
- c) $m + 4$ jest liczbą pierwszą.

Znajdź liczbę m .

Zadanie 5. Udowodnij, że jeżeli punkt przecięcia przekątnych czworokąta jest środkiem okręgu wpisanego w ten czworokąt, to dany czworokąt jest rombem.