Internetowe Kółko Matematyczne 2004/2005

`http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/`

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw I* (20 IX)

Zadanie 1. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Co jest większe: $n!$ czy 2^{n^2}?

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnego całkowitego n różnica $n^5 - n^3$ dzieli się przez 24.

Zadanie 3. Ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$ jest określony w ten sposób, że $x_1 = 1$ oraz $x_{n+1} = 2x_n + n - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Znajdź wzór ogólny na x_n.

Zadanie 4. Znajdź warunek (konieczny i wystarczający) na to, by liczby dodatnie x, y i z były długościami wysokości pewnego trójkąta.

Zadanie 5. Na ile sposobów można ustawić w ciąg elementy a_1, a_2, $\ldots$, a_n tak, aby elementy a_1 i a_n nie stały obok siebie?

Zestaw II (10 X)

Zadanie 1. Udowodnij, że liczba 2^{1111} ma więcej niż 333 cyfry.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie czwórki liczb całkowitych nieujemnych $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$ spełniające równanie

$$x! + y! + z! = t!.$$

Zadanie 3. Niech p będzie liczbą pierwszą, a m dodatnią liczbą nieparzystą niepodzielną przez p. Udowodnij, że jeżeli k i l są takimi liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez p, że suma $k + l$ dzieli się przez p i nie dzieli się przez p^2, to suma $k^m + l^m$ również dzieli się przez p i nie dzieli się przez p^2.

Zadanie 4. Wykaż, że $\binom{2n}{n}$ jest podzielne przez $n + 1$.

Zadanie 5. Dany jest $2n$-kąt opisany na okręgu. Wykaż, że jeśli każde dwa przeciwległe boki tego wielokąta są równoległe, to każde dwa przeciwległe boki tego wielokąta są równe.

Zestaw III (30 X)

Zadanie 1. Wykaż, że jeżeli liczby całkowite x, y, z, t spełniają równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4t^2,$$

to x, y i z są parzyste.

Zadanie 2. Zadanie ze starożytnego Egiptu. Podziel 100 bochenków chleba między pięciu ludzi w ten sposób, by uzyskane części stanowiły ciąg arytmetyczny i jedna siódma sumy trzech największych części była równa sumie dwóch najmniejszych części.

Zadanie 3. Oblicz sumę

$$1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots11}_{n}.$$

Zadanie 4. Wykaż, że pole trójkąta, którego wierzchołki leżą wewnątrz kwadratu, jest mniejsze od połowy pola tego kwadratu.

Zadanie 5. Dane są czworokąty wpisane $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Udowodnij, że jeżeli $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ i $CD \parallel C'D'$, to $DA \parallel D'A'$.

Zestaw IV (5 XII)

Zadanie 1. Wyznacz, w zależności od parametrów a i b, liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b. \end{cases}$$

Zadanie 2. Dane są liczby całkowite a, b, c takie, że $a + b$ jest podzielne przez c, a c jest podzielne przez 3. Wykaż, że $a^3 + b^3$ jest podzielne przez $3c$.

Zadanie 3. Udowodnij, że w trójkącie prostokątnym środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego jest równa połowie przeciwprostokątnej.

Zadanie 4. Wiadomo, że dwa spośród poniższych zdań o liczbie naturalnej m są prawdziwe, a jedno fałszywe:
a) m jest czwartą potęgą liczby naturalnej,
b) $m + 1$ jest podzielne przez 3,
c) $m + 4$ jest liczbą pierwszą.
Znajdź liczbę m.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeżeli punkt przecięcia przekątnych czworokąta jest środkiem okręgu wpisanego w ten czworokąt, to dany czworokąt jest rombem.

Zestaw V (30 I)

Zadanie 1. Znajdź wszystkie cyfry, którymi może się kończyć zapis dziesiętny sumy

$$1! + 2! + \ldots + n!$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Zadanie 2. Oblicz iloczyn

$$\underbrace{33\ldots33}_{n}\cdot\underbrace{33\ldots3}_{n-1}4.$$

Zadanie 3. Wykaż, że jeżeli $x+y=z$ i $y+z\neq 0$, to

$$\frac{x^3+z^3}{y^3+z^3}=\frac{x+z}{y+z}.$$

Zadanie 4. W ilu liczbach pięciocyfrowych cyfra 5 występuje dokładnie k razy? Odpowiedz na to pytanie dla $k=0,1,\ldots,5$.

Zadanie 5. W sferę wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o największej możliwej objętości. Znajdź stosunek krawędzi bocznej tego ostrosłupa do jego krawędzi podstawy.

Wskazówki do zadań

Zestaw I

1. Przedstaw obie liczby w postaci iloczynu tej samej liczby czynników.

2. Przedstaw dane wyrażenie w postaci iloczynu.

3. Do obu stron równości dodaj $n+1$.

4. Skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta.

5. Na ile sposobów można ustawić w ciąg dane elementy tak, aby a_1 i a_n stały obok siebie?

Zestaw II

1. Zapisz tezę zadania w postaci nierówności.

2. Oszacuj z góry lewą stronę równania.

3. Napisz warunek na $k+l$, wyraź stąd np. k i oblicz $k^m + l^m$.

4. Przekształć wyrażenie $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ tak, aby otrzymać symbole Newtona.

5. Symetria środkowa.

Zestaw III

1. Jaką resztę przy dzieleniu przez 4 daje kwadrat liczby całkowitej? Rozważ oddzielnie kwadrat liczby parzystej i kwadrat liczby nieparzystej.

2. Można oczywiście skorzystać ze znanych wzorów. Drugi sposób: ile wynosi suma trzech największych części, a ile suma dwóch najmniejszych części? Czemu jest równa środkowa część?

3. Pomnóż tę sumę przez 9.

4. Podziel (we właściwy sposób) na dwie części kwadrat razem z trójkątem.

5. Rozważ wszystkie przypadki. Zwróć uwagę na kąty czworokątów.

Zestaw IV

2. Skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia.

3. Wykaż, że dana środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.

4. Czy oba zdania b) i c) mogą być prawdziwe?

5. Przyjrzyj się trójkątom, na które dzieli czworokąt jedna z jego przekatnych.

Zestaw V

1. Wypisz ostatnie cyfry składników tej sumy.

2. Postaraj się wykorzystać liczbę $\underbrace{99\ldots99}_{n}$.

3. Wzory skróconego mnożenia.

4. Na ile sposobów można wybrać k miejsc, na których będą stały piątki?

5. Wyraź krawędź podstawy i krawędź ściany bocznej przez promień kuli i wysokość ostrosłupa.