Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

30 IX rok 2004/2005 *Bukiet 1*

Napisaliśmy n listów do n osób i zaadresowaliśmy n kopert. Przez a_n oznaczmy liczbę sposobów włożenia listów do kopert, spełniających następujący warunek:

($\star$) wkładamy wszystkie listy do kopert, po jednym liście do każdej koperty, ale żaden list nie trafia do właściwej koperty.

1. Znajdź a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5.

2. Załóżmy, że $n > 2$. Wybierzmy spośród adresatów naszych listów osoby A i B. Rozważmy wszystkie sposoby włożenia listów do kopert, spełniające warunek ($\star$), przy których list napisany do osoby A wkładamy do koperty zaadresowanej do osoby B, a do koperty zaadresowanej do osoby A wkładamy list napisany do:

a) osoby B,

b) innej osoby niż B.

Udowodnij, że liczby tych sposobów są odpowiednio równe: a) a_{n-2}, b) a_{n-1}.

3. Wyprowadź wzór

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad n = 3, 4, 5, \ldots \qquad (\star\star)$$

4. Porównując z wynikami zadania 1, sprawdź poprawność wzoru ($\star\star$) dla $n = 3, 4, 5$, a następnie wyznacz a_6.

20 X *Bukiet 2*

Zbiór nazywamy wypukłym, jeśli odcinek łączący dowolne dwa punkty należące do tego zbioru jest zawarty w tym zbiorze.

1. a) Na płaszczyźnie dane są punkty A, B, C, D. Znajdź punkt S o tej własności, że jeśli dowolne trzy spośród punktów A, B, C, D należą do zbioru wypukłego, to punkt S też należy do tego zbioru wypukłego.

b) Na płaszczyźnie dane są cztery zbiory wypukłe. Udowodnij, że jeżeli dowolne trzy z tych czterech zbiorów mają wspólny punkt, to wszystkie cztery zbiory też mają wspólny punkt.

2. a) Na płaszczyźnie dane są zbiory wypukłe $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$, $n > 3$. Uzasadnij, że jeśli dowolne trzy spośród danych zbiorów mają wspólny punkt, to również dowolne trzy spośród n zbiorów $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n \cap A_{n+1}$ mają wspólny punkt.

b) Wykaż, że część wspólna dwóch zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

c) Na płaszczyźnie danych jest n zbiorów wypukłych, $n > 3$. Udowodnij, że jeżeli dowolne trzy z danych zbiorów mają wspólny punkt, to wszystkie zbiory też mają wspólny punkt.

3. Czy podobna własność zachodzi dla zbiorów wypukłych w przestrzeni trójwymiarowej?

10 XI *Bukiet 3*

1. Rozważmy iloczyn
$$x \cdot (x+2) \cdot (x+4) \cdot (x+6).$$
Niech t będzie średnią arytmetyczną wszystkich czterech czynników tego iloczynu. Wyraź przez t iloczyn dwóch środkowych czynników oraz iloczyn dwóch skrajnych czynników. Zauważ, że średnia arytmetyczna obu tych iloczynów wynosi $p = t^2 - 5$.

2. Wykaż, że
$$x(x+2)(x+4)(x+6) = p^2 - 16.$$

3. Znajdź p, t oraz x, jeśli
$$x(x+2)(x+4)(x+6) = 384.$$

4. Rozwiąż równanie
$$x(x+1)(x+2)(x+3) = 120.$$

15 XII *Bukiet 4*

1. Uzasadnij, że między dowolnymi dwiema liczbami wymiernymi leży:

a) co najmniej jedna liczba wymierna,

b) nieskończenie wiele liczb wymiernych.

2. a) Dane są liczby rzeczywiste $a < b$ i liczba naturalna $n > \frac{1}{b-a}$. Wykaż, że w przedziale (a, b) leży co najmniej jedna liczba wymierna postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m jest liczbą całkowitą.

b) Udowodnij, że między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi leży nieskończenie wiele liczb wymiernych.

9 III *Bukiet 5*

1. Na płaszczyźnie dany jest kwadrat. Wyznacz zbiór wszystkich punktów płaszczyzny leżących na zewnątrz kwadratu, dla których najbliższy punkt kwadratu:

a) jest jego wierzchołkiem;

b) nie jest jego wierzchołkiem.

2. Do kwadratu o boku długości 1 dołączamy punkty, których odległość od niego (czyli od najbliższego punktu kwadratu) jest mniejsza lub równa od $\frac{1}{2}$. Oblicz pole otrzymanej figury.

3. Zauważ, że koło o średnicy 1 ma punkty wspólne z kwadratem o boku długości 1 wtedy i tylko wtedy, gdy środek tego okręgu należy do figury utworzonej w zadaniu 2.

4. Wyznacz miejsce geometryczne (czyli zbiór wszystkich możliwych) środków okręgów o średnicy 1, leżących wewnątrz prostokąta o bokach 21 i 26.

5. W prostokącie o bokach długości 21 i 26 umieszczono w dowolny sposób 132 kwadraty o boku długości 1 (mogą nawet się nakładać). Czy można w tym prostokącie umieścić okrąg o średnicy 1, nie mający punktów wspólnych z żadnym z kwadratów?

Wskazówki do zadań

Bukiet 1

2. a) Rozważ pozostałe osoby.

b) Co trzeba zrobić, aby ten przypadek sprowadzić do rozważenia pozostałych osób (bez A i B)?

3. Wybierz osobę A, a przez B oznacz adresata koperty, do której wkładamy list napisany do A.

Bukiet 2

1. a) Rozważ różne przypadki.

b) Wybierz po jednym punkcie wspólnym dla każdych trzech zbiorów.

2. a) Co, na podstawie zadania 1 b), można powiedzieć o zbiorach $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$?

c) Indukcja. Jak wykonać krok indukcyjny? – patrz punkt a).

Bukiet 4

2. a) Znajdź najmniejszą liczbę takiej postaci większą od a i wykaż, że ta liczba jest mniejsza od b.

1,2. b) Liczba wymierna leżąca w danym przedziale dzieli go na dwie części. W każdej z tych części znów leży jakaś liczba wymierna. I tak dalej.

Bukiet 5

1. Dla punktu płaszczyzny najbliższym punktem prostej jest rzut tego punktu na tę prostą.

2. Jak mierzymy odległość danego punktu od kwadratu, gdy najbliższym punktem kwadratu jest jego wierzchołek, a jak, gdy nie jest jego wierzchołek?

5. Rozważ dwie figury: zbiór środków okręgów o średnicy 1, leżących wewnątrz prostokąta, i zbiór środków okręgów o średnicy 1, mających punkty wspólne z kwadratami. Jaka zależność zachodzi między tymi figurami, jeśli żądane rozmieszczenie nie jest możliwe?