Internetowe Kółko Matematyczne 2004/2005

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

Zadania dla gimnazjum *Zestaw I* (30 IX)

Zadanie 1. Przedstaw liczbę 50 w postaci sumy czterech liczb, których iloczyn jest równy 9000.

Zadanie 2. Która z liczb: 9^{11}, 10^{10}, 11^9 jest największa, a która najmniejsza?

Zadanie 3. Znajdź długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b.

Zadanie 4. Podziel dany trójkąt ostrokątny na trójkąty równoramienne.

Zadanie 5. Uzasadnij, że jeśli czworokąt ma więcej niż jedną oś symetrii, to ma środek symetrii.

Zestaw II (20 X)

Zadanie 1. Uzasadnij, że jeżeli m i n są liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez 3, to jedna z liczb $mn+1$, $m-n$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 2. Wykaż, że iloczyn dowolnych czterech kolejnych liczb całkowitych można przedstawić w postaci iloczynu dwóch kolejnych liczb parzystych.

Zadanie 3. Następujące liczby ustaw w kolejności od najmniejszej do największej:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}.$$

Zadanie 4. Podaj przykład dziesięciu (niekoniecznie różnych) liczb wymiernych różnych od zera, których suma jest równa 1 i suma ich kwadratów jest równa 1.

Zadanie 5. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt B poprowadzono prostą przecinającą jeden okrąg w punkcie C, a drugi okrąg w punkcie D. Uzasadnij, że odcinek AC jest średnicą jednego okręgu dokładnie wtedy, gdy odcinek AD jest średnicą drugiego okręgu.

Zestaw III (10 XI)

Zadanie 1. Iloczyn dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 6 jest równy 144. Znajdź te liczby.

Zadanie 2. Przedstaw liczbę 1000 w postaci $97k + 102l$, gdzie k i l są liczbami naturalnymi.

Zadanie 3. Znajdź pięć różnych liczb naturalnych, których suma odwrotności wynosi 1.

Zadanie 4. Jedna przekątna dzieli pewien czworokąt na dwa trójkąty, z których każdy ma kąty $40°$, $60°$ i $80°$. Druga przekątna dzieli ten czworokąt na dwa trójkąty, z których jeden ma kąty $50°$, $50°$ i $80°$. Jakie kąty ma drugi trójkąt?

Zadanie 5. Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano trójkąty równoboczne. Uzasadnij, że suma pól trójkątów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu trójkąta zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Zestaw IV (15 XII)

Zadanie 1. Znajdź najmniejszą liczbę pięciocyfrową, której wszystkie cyfry są parzyste, a ich suma jest równa 22.

Zadanie 2. Dane są liczby naturalne $m, n \geqslant 1$. Wykaż, że

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m-n} = \left(\frac{n}{m}\right)^{n-m}.$$

Zadanie 3. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość $\sqrt{2}$. Znajdź długości dwóch pozostałych boków tego trójkąta, wiedząc, że ich różnica jest równa 1.

Zadanie 4. Dany jest czworokąt $ABCD$ taki, że $|AB| = |AD|$, $|BC| = |CD|$, $|\angle BAD| = 60°$ oraz $|\angle BCD| = 150°$. Udowodnij, że $|AB| = |BD| = |AC|$.

Zadanie 5. Jaka najmniejsza liczba kolorów wystarczy do pomalowania wierzchołków ostrosłupa n-kątnego tak, aby końce każdej krawędzi były różnych kolorów? To samo pytanie dla graniastosłupa n-kątnego.

Zestaw V (9 III)

Zadanie 1. Oblicz

$$2^{100} \cdot 2^{-99} \cdot 2^{98} \cdot 2^{-97} \cdot \ldots \cdot 2^{2} \cdot 2^{-1}.$$

Zadanie 2. Wykaż, że liczby x i y spełniają równanie

$$x^2 + y^2 = 2xy + 1$$

dokładnie wtedy, gdy $|x - y| = 1$.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe $ABCD$, które są podzielne przez wszystkie swoje cyfry oraz przez liczby dwucyfrowe AB, BC i CD.

Zadanie 4. Oblicz pole rombu o boku długości a, w którym jedna z przekątnych ma długość a.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC. Przez punkt C prowadzimy proste równoległe do dwusiecznych kątów BAC i ABC. Punkty przecięcia tych prostych z prostą AB oznaczmy przez K i L. Uzasadnij, że długość odcinka KL jest równa obwodowi trójkąta ABC.

Wskazówki do zadań

Zestaw I

1. Wypisz wszystkie dzielniki liczby 9000 mniejsze od 50. Ile składników szukanej sumy może być liczbami parzystymi? Ile składników może być podzielnych przez 5?

2. Nie trzeba podnosić liczb 9 ani 11 do potęgi wyższej niż trzecia.

3. Wykorzystaj pole trójkąta.

4. Rozważ podział na trzy trójkąty.

5. Przez jakie punkty może przechodzić oś symetrii czworokąta? Rozważ dwie możliwości.

Zestaw II

1. Rozważ reszty z dzielenia przez 3.

2. Napisz iloczyn dowolnych czterech kolejnych liczb całkowitych zaczynając np. od n. Przekształć ten iloczyn do szukanej postaci.

4. Szukaj wśród liczb postaci $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ z odpowiednimi znakami i w odpowiedniej liczbie egzemplarzy.

5. Zwróć uwagę na kąty.

Zestaw III

1. Jedna z szukanych liczb nie może być podzielna przez 2, a druga przez 3.

2. Zauważ, że $97 = 100 - 3$, a $102 = 100 + 2$.

3. Łatwo podać trzy liczby naturalne, których suma odwrotności wynosi 1. Jak przedstawić liczbę $\frac{1}{n}$ w postaci sumy dwóch odwrotności?

5. Wystarczy skorzystać ze wzoru na pole trójkąta równobocznego i z pewnego znanego twierdzenia.

Zestaw IV

2. Jaka jest zależność między wykładnikami po obu stronach?

3. Twierdzenie Pitagorasa i wzór skróconego mnożenia.

4. Zwróć uwagę na trójkąty równoramienne.

5. Najpierw pomaluj wierzchołki podstawy.

Zestaw V

1. Przyjrzyj się uważnie wykładnikom.

2. Przekształć równanie i skorzystaj ze znanego wzoru.

3. Zauważ, że $ABCD = AB \cdot 100 + CD$.

4. Narysuj dany romb i tę przekątną.

5. Wykorzystaj równości kątów.