

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA GIMNAZJUM
<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

20 IX

rok 2004/2005

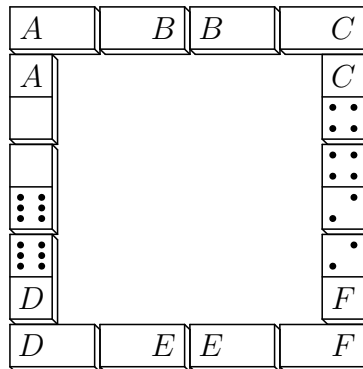
Bukiet 1

1. Wykaż, że środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.
2. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD i obrano na niej dowolny punkt P . Wykaż, że pola trójkątów BDP i CDP są równe.
3. Wiadomo, że trzy środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie. Uzasadnij, że jeśli S jest punktem przecięcia środkowych trójkąta ABC , to trójkąty ABS , BCS i CAS mają równe pola.

10 X

Bukiet 2

Do klocków 0–6 i 2–4 dokładamy zgodnie z zasadą domina wszystkie klocki o nieparzystej sumie oczek tak, aby otrzymać kwadrat 8×8 , w którym sumy oczek z ośmiu pól na każdym boku będą równe.



1. Zauważ, że litery od A do F oznaczają nieparzyste liczby oczek.
2. Udowodnij równości:
 - a) $A + D = C + F$,
 - b) $A + D + C + F = 2 \cdot (B + E)$.
3. Znajdź wszystkie szukane sposoby ułożenia klocków.

30 X

Bukiet 3

1. Dane są takie liczby całkowite k, l , że liczba $k + 2l$ jest podzielna przez 3. Wykaż, że liczba $2k + l$ też jest podzielna przez 3.

2. Dane są takie liczby całkowite k, l, m , że liczba $2k + 3l + 4m$ jest podzielna przez 5. Wykaż, że liczba $k + 2m + 4l$ też jest podzielna przez 5.

3. Dane są takie liczby całkowite k, l, m, n , że liczba $11k + 12l + 13m + 14n$ jest podzielna przez 15. Wykaż, że liczba $6l + 7n + 13k + 14m$ też jest podzielna przez 15.

5 XII

Bukiet 4

1. Uzasadnij, że wśród liczb

$$11, 11^2, 11^3, 11^4, 11^5, \dots$$

są takie dwie, które mają jednakowe końcówki pięciocyfrowe.

2. Zauważ, że jeśli liczby 11^k i 11^l , gdzie $k < l$, mają takie same końcówki pięciocyfrowe, to zapis liczby $11^k \cdot (11^{l-k} - 1)$ kończy się pięcioma zerami.

3. Wykaż, że dla pewnego n liczba 11^n ma końcówkę postaci 00001.

30 I

Bukiet 5

1. Oblicz kwadraty liczb naturalnych od $\underbrace{10 \dots 00}_n$ do $\underbrace{10 \dots 05}_{n-1}$.

2. Czy do liczby $\underbrace{10 \dots 01}_{n-1}$ można dopisać n cyfr tak, aby otrzymać kwadrat liczby naturalnej?

3. Na ile sposobów można dopisać $n + 1$ cyfr do liczby $\underbrace{10 \dots 0}_{n-1}$ tak, aby otrzymać kwadrat liczby naturalnej?

Wskazówki do zadań

Bukiet 1

1. Środkowa to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.
2. Odcinki BD i CD są równe.
3. Co wynika z zadań 1 i 2?

Bukiet 2

2. Wykorzystaj równości sum oczek na bokach kwadratu.
3. Co można wywnioskować z zadania 2? Rozważ poszczególne przypadki.

Bukiet 3

1. Zbadaj dwukrotność liczby $k + 2l$.
2. Zbadaj właściwą krotność liczby $2k + 3l + 4m$.
3. Wykorzystaj to, że liczba $15k + 15l + 15m + 15n$ jest podzielna przez 15.

Bukiet 4

1. Ile jest wszystkich możliwych końcówek pięciocyfrowych?
2. Oblicz ten iloczyn.
3. Co można powiedzieć o końcówkach czynników iloczynu z zadania 2?

Bukiet 5

1. Wykonaj mnożenie pisemne lub zapisz dane liczby za pomocą potęgi liczby 10.
2. Jaki jest następny kwadrat po $10 \underbrace{\dots 0}_{2n}$?
3. Z zadania 1 znasz wszystkie kwadraty szukanej postaci.