

INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE 2003/2004

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw XIV (24 V)

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p mniejsze od 20, o tej własności, że liczba $n^2 + n + 1$ nie jest podzielna przez p dla żadnego całkowitego n .

Zadanie 2. Udowodnij, że jeżeli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 2 ani przez 5, to istnieje liczba naturalna k taka, że liczba

$$\underbrace{11 \dots 11}_k$$

jest podzielna przez n .

Zadanie 3. Co możemy powiedzieć o znakach liczb a, b, c , jeśli znamy znaki liczb

$$a + b + c, \quad ab + bc + ca, \quad abc?$$

Zadanie 4. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c i przeciwległych kątach o miarach odpowiednio α, β i γ . Udowodnij, że jeżeli liczby α, β, γ tworzą ciąg arytmetyczny, to sinus różnicy tego ciągu jest równy $\frac{c-a}{2R}$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na danym trójkącie.

Zadanie 5. Znajdź najmniejszą liczbę dodatnią r o tej własności, że każdy czworokąt o bokach długości nie większej od 1 jest zawarty w pewnym kole o promieniu r .