

INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE 2003/2004

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw IX (13 II)

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$m^n = 729$$

w liczbach naturalnych m, n .

Zadanie 2. Uzasadnij, że jeżeli p, q i r są różnymi liczbami pierwszymi, to suma $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ nie jest odwrotnością liczby naturalnej.

Zadanie 3. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $a + b \geq 0$, to zachodzi nierówność

$$(a^2 + b^2)(a^5 + b^5) \geq (a^3 + b^3)(a^4 + b^4),$$

a jeżeli spełniają warunek $a + b \leq 0$, to zachodzi nierówność

$$(a^2 + b^2)(a^5 + b^5) \leq (a^3 + b^3)(a^4 + b^4).$$

Zadanie 4. Dana jest funkcja kwadratowa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz liczby rzeczywiste $x_1 < x_2$ i $y_1 < y_2$. Wykaż, że jeżeli liczby $f(x_1)$, $f(x_2)$ i $f(\frac{x_1+x_2}{2})$ leżą w przedziale $[y_1, y_2]$, to dla każdego $x \in [x_1, x_2]$ liczba $f(x)$ leży w przedziale $[\frac{9}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2, \frac{9}{8}y_2 - \frac{1}{8}y_1]$.

Zadanie 5. Mając daną miarę kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, oblicz stosunek promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.