Internetowe Kółko Matematyczne 2003/2004

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw VII* (9 I)

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych $k, l, m \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$2 \cdot (k! + l! + m!) \leqslant (k + l + m)!$$

Zadanie 2. Na ile sposobów możemy ustawić liczby 1, 2, 3, 4, 5 w ciąg, w którym dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$ liczba k nie stoi na k-tym miejscu?

Zadanie 3. Oblicz sumy:

$$\text{a)} \quad \sum m_1 m_2 \ldots m_k, \qquad \text{b)} \quad \sum \frac{1}{m_1 m_2 \ldots m_k},$$

gdzie wyrażenia po lewej stronie równości oznaczają odpowiednio sumy (symbol $\sum$) wyrażeń postaci

$$\text{a)} \quad m_1 m_2 \ldots m_k, \qquad \text{b)} \quad \frac{1}{m_1 m_2 \ldots m_k},$$

po wszystkich układach liczb $m_1, m_2, \ldots, m_k$ takich, że $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_k \leqslant n$.

Zadanie 4. Na boku AB prostokąta $ABCD$ obrano taki punkt P, że trójkąty ADP i BPC są podobne. Wykaż, że do każdego z tych trójkątów jest podobny trójkąt PCD. Jaką zależność muszą spełniać długości boków prostokąta, aby istniał punkt P o podanej własności?

Zadanie 5. Dane są liczby dodatnie p i q. Które z czworokątów o przekątnych długości p i q mają największe pole?