

INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE 2003/2004

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw V (21 XI)

Zadanie 1. Udowodnij równość

$$\underbrace{11\dots1}_n \cdot \underbrace{99\dots9}_n + \underbrace{33\dots3}_n = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{22\dots2}_n.$$

Zadanie 2. Wykaż, że liczba $n^6 - n^2$ jest podzielna przez 60 dla dowolnego całkowitego n .

Zadanie 3. Rozwiąż równanie $x \cdot [x] = 10$, gdzie symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Zadanie 4. Uzasadnij, że jeżeli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek

$$\frac{a^n + b^n}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

dla $n = 2$, to spełniają ten warunek dla dowolnego naturalnego n .

Zadanie 5. Wykaż, że w każdym trójkącie stosunek długości pewnych dwóch boków jest większy od 1 i mniejszy od $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.