

# INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE 2003/2004

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw IV (31 X)

**Zadanie 1.** Wykaż, że jeśli  $n$  jest liczbą całkowitą, to

$$\frac{n^3 + 2003n}{6}$$

też jest liczbą całkowitą.

**Zadanie 2.** Wykaż, że jeżeli

$$x^2 + x = y^2 + y = z^2 + z,$$

to  $x = y$  lub  $y = z$ , lub  $z = x$ .

**Zadanie 3.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $x_1, \dots, x_n$  zachodzi nierówność

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1) \geq 2^n x_1 x_2 \dots x_n.$$

**Zadanie 4.** Trapez równoramienny o podstawach długości  $a$  i  $b$  jest opisany na okręgu. Wyznacz promień tego okręgu.

**Zadanie 5.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Na bokach tego trójkąta budujemy trzy trójkąty równoboczne: trójkąt  $ABD$  do wewnątrz trójkąta  $ABC$ , a trójkąty  $BCE$  i  $CAF$  na zewnątrz. Wykaż, że punkty  $C, D, E, F$  są wierzchołkami równoległoboku lub leżą na jednej prostej.