Internetowe Kółko Matematyczne 2003/2004

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw IV* (31 X)

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to

$$\frac{n^3 + 2003n}{6}$$

też jest liczbą całkowitą.

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli

$$x^2 + x = y^2 + y = z^2 + z,$$

to $x = y$ lub $y = z$, lub $z = x$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1) \geqslant 2^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Zadanie 4. Trapez równoramienny o podstawach długości a i b jest opisany na okręgu. Wyznacz promień tego okręgu.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC. Na bokach tego trójkąta budujemy trzy trójkąty równoboczne: trójkąt ABD do wewnątrz trójkąta ABC, a trójkąty BCE i CAF na zewnątrz. Wykaż, że punkty C, D, E, F są wierzchołkami równoległoboku lub leżą na jednej prostej.

Internetowe Kółko Matematyczne 2003/2004

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw IV* (31 X)

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to

$$\frac{n^3 + 2003n}{6}$$

też jest liczbą całkowitą.

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli

$$x^2 + x = y^2 + y = z^2 + z,$$

to $x = y$ lub $y = z$, lub $z = x$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1) \geqslant 2^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Zadanie 4. Trapez równoramienny o podstawach długości a i b jest opisany na okręgu. Wyznacz promień tego okręgu.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC. Na bokach tego trójkąta budujemy trzy trójkąty równoboczne: trójkąt ABD do wewnątrz trójkąta ABC, a trójkąty BCE i CAF na zewnątrz. Wykaż, że punkty C, D, E, F są wierzchołkami równoległoboku lub leżą na jednej prostej.

Internetowe Kółko Matematyczne 2003/2004

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw IV* (31 X)

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to

$$\frac{n^3 + 2003n}{6}$$

też jest liczbą całkowitą.

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli

$$x^2 + x = y^2 + y = z^2 + z,$$

to $x = y$ lub $y = z$, lub $z = x$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1) \geqslant 2^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Zadanie 4. Trapez równoramienny o podstawach długości a i b jest opisany na okręgu. Wyznacz promień tego okręgu.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC. Na bokach tego trójkąta budujemy trzy trójkąty równoboczne: trójkąt ABD do wewnątrz trójkąta ABC, a trójkąty BCE i CAF na zewnątrz. Wykaż, że punkty C, D, E, F są wierzchołkami równoległoboku lub leżą na jednej prostej.

Internetowe Kółko Matematyczne 2003/2004

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw IV* (31 X)

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to

$$\frac{n^3 + 2003n}{6}$$

też jest liczbą całkowitą.

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli

$$x^2 + x = y^2 + y = z^2 + z,$$

to $x = y$ lub $y = z$, lub $z = x$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1) \geqslant 2^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Zadanie 4. Trapez równoramienny o podstawach długości a i b jest opisany na okręgu. Wyznacz promień tego okręgu.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC. Na bokach tego trójkąta budujemy trzy trójkąty równoboczne: trójkąt ABD do wewnątrz trójkąta ABC, a trójkąty BCE i CAF na zewnątrz. Wykaż, że punkty C, D, E, F są wierzchołkami równoległoboku lub leżą na jednej prostej.