

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

4 V

rok 2003/2004

Bukiet 12

1. Na płaszczyźnie dane jest koło K o środku S i promieniu R . Zauważ, że:

a) jeśli punkt M leży w kole K , to koło o środku M i promieniu a jest zawarte w kole o środku S i promieniu $R + a$;

b) jeśli punkt M nie leży w kole K , to koło o środku M i promieniu $a < R$ nie ma punktów wspólnych z kołem o środku S i promieniu $R - a$.

2. Rozważmy prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie. Symbolem $K(r)$ oznaczamy koło o środku $(0, 0)$ i promieniu r . Kwadratem jednostkowym o środku (x, y) nazywamy kwadrat o wierzchołkach $(x \pm \frac{1}{2}, y \pm \frac{1}{2})$. Punkt, którego obie współrzędne są całkowite, nazywamy punktem kratowym.

a) Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach leżących w kole $K(R)$ są zawarte w kole $K(R + \frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach będących punktami kratowymi leżącymi w kole $K(R)$ pokrywają w całości koło $K(R - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

3. Wyprowadź oszacowanie (z góry i z dołu) liczby punktów kratowych leżących w kole $K(R)$.

4. Oznaczmy przez L_n liczbę par liczb całkowitych (x, y) spełniających nierówność $x^2 + y^2 \leq n$. Oszacuj L_n i oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n}.$$