

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

19 IV

rok 2003/2004

Bukiet 11

Dane są zbiory skończone A_1, A_2, \dots, A_n . Dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ określamy

$$w_i(x) = W(x \in A_i) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli } x \notin A_i, \end{cases}$$

gdzie $W(\)$ oznacza wartość logiczną zdania.

1. Zauważ, że

$$\prod_{i=1}^n (1 - w_i(x)) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} w_{i_1}(x) \dots w_{i_k}(x).$$

2. Sprawdź równość

$$w_{i_1}(x) \dots w_{i_k}(x) = W(x \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

3. Wykaż, że dla każdego $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} W(x \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = 1.$$

4. Dane są zbiory skończone $B \subset A$. Zauważ, że

$$\sum_{x \in A} W(x \in B) = |B|,$$

gdzie $|B|$ oznacza liczbę elementów (moc) zbioru B .

5. Udowodnij wzór

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$