

1. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz punkt o współrzędnych (x_0, y_0) . Uzasadnij, że wykres funkcji f ma środek symetrii w punkcie (x_0, y_0) dokładnie wtedy, gdy funkcja f spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$.

2. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz prosta o równaniu $x = x_0$. Uzasadnij, że wykres funkcji f ma oś symetrii o równaniu $x = x_0$ dokładnie wtedy, gdy funkcja f spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

3. a) Wykaż, że punkt (x_2, y_2) jest symetryczny do punktu (x_1, y_1) względem prostej o równaniu $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) dokładnie wtedy, gdy

$$y_1 + y_2 = a \cdot (x_1 + x_2) + 2b \quad \text{i} \quad x_1 + ay_1 = x_2 + ay_2.$$

b) Uzasadnij, że wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma oś symetrii o równaniu $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) dokładnie wtedy, gdy funkcja f spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x') = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot f(x) + \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot x + \frac{2b}{a^2 + 1},$$

gdzie

$$x' = \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot f(x) - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot x - \frac{2ab}{a^2 + 1}.$$