

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

6 II

rok 2003/2004

Bukiet 8

Dana jest liczba rzeczywista  $r > 0$ .

1. Narysuj w układzie współrzędnych zbiory punktów spełniających równania:

**a)**  $|x| + |y| = r$ ,    **b)**  $x^2 + y^2 = r^2$ ,

**c)**  $|x + y| + |x - y| = 2r$ ,    **d)**  $x^2 + y^2 = 2r^2$ ,    **e)**  $|x| + |y| = 2r$ .

2. Uzasadnij algebraicznie, że:

**a)** jeśli  $|x| + |y| \leq r$ , to  $|x| \leq r$ ,  $|y| \leq r$  i  $x^2 + y^2 \leq r^2$ ;

**b)** jeśli  $x^2 + y^2 \leq r^2$ , to  $|x| \leq r$  i  $|y| \leq r$ ;

**c)**  $|x + y| + |x - y| \leq r$  dokładnie wtedy, gdy  $|x| \leq r$  i  $|y| \leq r$ ;

**d)** jeśli  $|x| \leq r$  i  $|y| \leq r$ , to  $x^2 + y^2 \leq 2r^2$ ;

**e)** jeśli  $x^2 + y^2 \leq 2r^2$ , to  $|xy| \leq r^2$  i  $|x| + |y| \leq 2r$ .

Podaj interpretację geometryczną implikacji a), b), d), e).

3. Dane są liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$ . Niech  $m = \min\{a, b\}$ ,  $M = \max\{a, b\}$ . Pokaż, że jeżeli  $x^2 + y^2 \leq 2r^2$ , to

$$|x - a| + |y - b| \leq |a| + |b| + 2r.$$

4. Dane są liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$ . Niech  $m = \min\{a, b\}$ ,  $M = \max\{a, b\}$ . Wykaż, że jeżeli  $|x| + |y| \leq r$ , to

**a)**  $|x| \cdot (r + 2|a|) + |y| \cdot (r + 2|b|) \leq r^2 + 2Mr$ ;

**b)**  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq m^2 + (M + r)^2$ .

Podaj geometryczne uzasadnienie nierówności b).