

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

24 X

rok 2003/2004

Bukiet 3

1. Przedstaw każdą z funkcji $\sin 2x$, $\sin 3x$ i $\sin 4x$ w postaci $F(\cos x) \cdot \sin x$, a każdą z funkcji $\cos 2x$, $\cos 3x$ i $\cos 4x$ w postaci $G(\cos x)$, gdzie F i G są wielomianami.

2. Określmy ciągi wielomianów (P_n) i (Q_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, następująco:

$$P_0(y) = 1, P_1(y) = 2y, P_{n+1}(y) = 2yP_n(y) - P_{n-1}(y) \text{ dla } n \geq 1,$$

$$Q_0(y) = 1, Q_1(y) = y, Q_{n+1}(y) = 2yQ_n(y) - Q_{n-1}(y) \text{ dla } n \geq 1.$$

a) Wyznacz wielomiany P_n i Q_n dla $n = 2, 3, 4$ i porównaj je z wielomianami z zadania 1.

b) Udowodnij indukcyjnie, że wielomiany P_n i Q_n spełniają warunki

$$\begin{cases} \sin(n+1)x = P_n(\cos x) \cdot \sin x \\ \cos nx = Q_n(\cos x) \end{cases}$$

dla dowolnego n .

c) Wykaż, że wielomiany P_n i Q_n są stopnia n oraz są funkcjami parzystymi dla parzystych n i nieparzystymi dla nieparzystych n .