3 X rok 2003/2004 *Bukiet 2*

Symbolem $\prod_{k=m}^{n} a_k$ oznaczamy iloczyn $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$, na przykład

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

1. a) Zauważ, że $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.
b) Korzystając z punktu a) rozpisz iloczyn $\prod_{k=2}^{8}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ i oblicz go.
c) Oblicz iloczyn

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$

gdzie $n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną.

2. a) Rozłóż na czynniki licznik i mianownik ułamka $\frac{k^2-k-2}{k^2+2k-3}$ i oblicz iloczyn

$$\prod_{k=3}^{n}\frac{k^2-k-2}{k^2+2k-3}.$$

b) W podobny sposób oblicz iloczyn

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{3k^2+2k-1}{3k^2-k-2}.$$

c) Oblicz iloczyn

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

3. Dana jest liczba rzeczywista $r>0$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{r-1}{n(n+r)}\right)<r.$$