Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

4 V | rok 2003/2004 | *Bukiet 12*

**1.** Na płaszczyźnie dane jest koło $K$ o środku $S$ i promieniu $R$. Zauważ, że:

**a)** jeśli punkt $M$ leży w kole $K$, to koło o środku $M$ i promieniu $a$ jest zawarte w kole o środku $S$ i promieniu $R+a$;

**b)** jeśli punkt $M$ nie leży w kole $K$, to koło o środku $M$ i promieniu $a<R$ nie ma punktów wspólnych z kołem o środku $S$ i promieniu $R-a$.

**2.** Rozważmy prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie. Symbolem $K(r)$ oznaczamy koło o środku $(0,0)$ i promieniu $r$. Kwadratem jednostkowym o środku $(x,y)$ nazywamy kwadrat o wierzchołkach $(x\pm\frac{1}{2}, y\pm\frac{1}{2})$. Punkt, którego obie współrzędne są całkowite, nazywamy punktem kratowym.

**a)** Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach leżących w kole $K(R)$ są zawarte w kole $K(R+\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**b)** Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach będących punktami kratowymi leżącymi w kole $K(R)$ pokrywają w całości koło $K(R-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**3.** Wyprowadź oszacowanie (z góry i z dołu) liczby punktów kratowych leżących w kole $K(R)$.

**4.** Oznaczmy przez $L_n$ liczbę par liczb całkowitych $(x,y)$ spełniających nierówność $x^2+y^2\leqslant n$. Oszacuj $L_n$ i oblicz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{n}.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

4 V | rok 2003/2004 | *Bukiet 12*

**1.** Na płaszczyźnie dane jest koło $K$ o środku $S$ i promieniu $R$. Zauważ, że:

**a)** jeśli punkt $M$ leży w kole $K$, to koło o środku $M$ i promieniu $a$ jest zawarte w kole o środku $S$ i promieniu $R+a$;

**b)** jeśli punkt $M$ nie leży w kole $K$, to koło o środku $M$ i promieniu $a<R$ nie ma punktów wspólnych z kołem o środku $S$ i promieniu $R-a$.

**2.** Rozważmy prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie. Symbolem $K(r)$ oznaczamy koło o środku $(0,0)$ i promieniu $r$. Kwadratem jednostkowym o środku $(x,y)$ nazywamy kwadrat o wierzchołkach $(x\pm\frac{1}{2}, y\pm\frac{1}{2})$. Punkt, którego obie współrzędne są całkowite, nazywamy punktem kratowym.

**a)** Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach leżących w kole $K(R)$ są zawarte w kole $K(R+\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**b)** Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach będących punktami kratowymi leżącymi w kole $K(R)$ pokrywają w całości koło $K(R-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**3.** Wyprowadź oszacowanie (z góry i z dołu) liczby punktów kratowych leżących w kole $K(R)$.

**4.** Oznaczmy przez $L_n$ liczbę par liczb całkowitych $(x,y)$ spełniających nierówność $x^2+y^2\leqslant n$. Oszacuj $L_n$ i oblicz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{n}.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

4 V | rok 2003/2004 | *Bukiet 12*

**1.** Na płaszczyźnie dane jest koło $K$ o środku $S$ i promieniu $R$. Zauważ, że:

**a)** jeśli punkt $M$ leży w kole $K$, to koło o środku $M$ i promieniu $a$ jest zawarte w kole o środku $S$ i promieniu $R+a$;

**b)** jeśli punkt $M$ nie leży w kole $K$, to koło o środku $M$ i promieniu $a<R$ nie ma punktów wspólnych z kołem o środku $S$ i promieniu $R-a$.

**2.** Rozważmy prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie. Symbolem $K(r)$ oznaczamy koło o środku $(0,0)$ i promieniu $r$. Kwadratem jednostkowym o środku $(x,y)$ nazywamy kwadrat o wierzchołkach $(x\pm\frac{1}{2}, y\pm\frac{1}{2})$. Punkt, którego obie współrzędne są całkowite, nazywamy punktem kratowym.

**a)** Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach leżących w kole $K(R)$ są zawarte w kole $K(R+\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**b)** Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach będących punktami kratowymi leżącymi w kole $K(R)$ pokrywają w całości koło $K(R-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**3.** Wyprowadź oszacowanie (z góry i z dołu) liczby punktów kratowych leżących w kole $K(R)$.

**4.** Oznaczmy przez $L_n$ liczbę par liczb całkowitych $(x,y)$ spełniających nierówność $x^2+y^2\leqslant n$. Oszacuj $L_n$ i oblicz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{n}.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

4 V | rok 2003/2004 | *Bukiet 12*

**1.** Na płaszczyźnie dane jest koło $K$ o środku $S$ i promieniu $R$. Zauważ, że:

**a)** jeśli punkt $M$ leży w kole $K$, to koło o środku $M$ i promieniu $a$ jest zawarte w kole o środku $S$ i promieniu $R+a$;

**b)** jeśli punkt $M$ nie leży w kole $K$, to koło o środku $M$ i promieniu $a<R$ nie ma punktów wspólnych z kołem o środku $S$ i promieniu $R-a$.

**2.** Rozważmy prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie. Symbolem $K(r)$ oznaczamy koło o środku $(0,0)$ i promieniu $r$. Kwadratem jednostkowym o środku $(x,y)$ nazywamy kwadrat o wierzchołkach $(x\pm\frac{1}{2}, y\pm\frac{1}{2})$. Punkt, którego obie współrzędne są całkowite, nazywamy punktem kratowym.

**a)** Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach leżących w kole $K(R)$ są zawarte w kole $K(R+\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**b)** Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach będących punktami kratowymi leżącymi w kole $K(R)$ pokrywają w całości koło $K(R-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**3.** Wyprowadź oszacowanie (z góry i z dołu) liczby punktów kratowych leżących w kole $K(R)$.

**4.** Oznaczmy przez $L_n$ liczbę par liczb całkowitych $(x,y)$ spełniających nierówność $x^2+y^2\leqslant n$. Oszacuj $L_n$ i oblicz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{n}.$$