Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

19 IV rok 2003/2004 *Bukiet 11*

Dane są zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ określamy

$$w_i(x) = W(x \in A_i) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad x \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli} \quad x \notin A_i, \end{cases}$$

gdzie $W(\ )$ oznacza wartość logiczną zdania.

1. Zauważ, że

$$\prod_{i=1}^{n}(1-w_i(x)) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} w_{i_1}(x)\ldots w_{i_k}(x).$$

2. Sprawdź równość

$$w_{i_1}(x)\ldots w_{i_k}(x) = W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

3. Wykaż, że dla każdego $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = 1.$$

4. Dane są zbiory skończone $B \subset A$. Zauważ, że

$$\sum_{x\in A} W(x \in B) = |B|,$$

gdzie $|B|$ oznacza liczbę elementów (moc) zbioru B.

5. Udowodnij wzór

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} |A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

19 IV rok 2003/2004 *Bukiet 11*

Dane są zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ określamy

$$w_i(x) = W(x \in A_i) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad x \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli} \quad x \notin A_i, \end{cases}$$

gdzie $W(\ )$ oznacza wartość logiczną zdania.

1. Zauważ, że

$$\prod_{i=1}^{n}(1-w_i(x)) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} w_{i_1}(x)\ldots w_{i_k}(x).$$

2. Sprawdź równość

$$w_{i_1}(x)\ldots w_{i_k}(x) = W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

3. Wykaż, że dla każdego $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = 1.$$

4. Dane są zbiory skończone $B \subset A$. Zauważ, że

$$\sum_{x\in A} W(x \in B) = |B|,$$

gdzie $|B|$ oznacza liczbę elementów (moc) zbioru B.

5. Udowodnij wzór

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} |A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

19 IV rok 2003/2004 *Bukiet 11*

Dane są zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ określamy

$$w_i(x) = W(x \in A_i) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad x \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli} \quad x \notin A_i, \end{cases}$$

gdzie $W(\ )$ oznacza wartość logiczną zdania.

1. Zauważ, że

$$\prod_{i=1}^{n}(1-w_i(x)) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} w_{i_1}(x)\ldots w_{i_k}(x).$$

2. Sprawdź równość

$$w_{i_1}(x)\ldots w_{i_k}(x) = W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

3. Wykaż, że dla każdego $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = 1.$$

4. Dane są zbiory skończone $B \subset A$. Zauważ, że

$$\sum_{x\in A} W(x \in B) = |B|,$$

gdzie $|B|$ oznacza liczbę elementów (moc) zbioru B.

5. Udowodnij wzór

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} |A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

19 IV rok 2003/2004 *Bukiet 11*

Dane są zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ określamy

$$w_i(x) = W(x \in A_i) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad x \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli} \quad x \notin A_i, \end{cases}$$

gdzie $W(\ )$ oznacza wartość logiczną zdania.

1. Zauważ, że

$$\prod_{i=1}^{n}(1-w_i(x)) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} w_{i_1}(x)\ldots w_{i_k}(x).$$

2. Sprawdź równość

$$w_{i_1}(x)\ldots w_{i_k}(x) = W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

3. Wykaż, że dla każdego $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = 1.$$

4. Dane są zbiory skończone $B \subset A$. Zauważ, że

$$\sum_{x\in A} W(x \in B) = |B|,$$

gdzie $|B|$ oznacza liczbę elementów (moc) zbioru B.

5. Udowodnij wzór

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} |A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|.$$