## Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

23 II | rok 2003/2004 | *Bukiet 9*

**1.** Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz punkt o współrzędnych $(x_0, y_0)$. Uzasadnij, że wykres funkcji $f$ ma środek symetrii w punkcie $(x_0, y_0)$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$.

**2.** Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz prosta o równaniu $x = x_0$. Uzasadnij, że wykres funkcji $f$ ma oś symetrii o równaniu $x = x_0$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

**3. a)** Wykaż, że punkt $(x_2, y_2)$ jest symetryczny do punktu $(x_1, y_1)$ względem prostej o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy

$$y_1 + y_2 = a \cdot (x_1 + x_2) + 2b \quad \text{i} \quad x_1 + ay_1 = x_2 + ay_2.$$

**b)** Uzasadnij, że wykres funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma oś symetrii o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x') = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot f(x) + \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot x + \frac{2b}{a^2 + 1},$$

gdzie

$$x' = \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot f(x) - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot x - \frac{2ab}{a^2 + 1}.$$


## Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

23 II | rok 2003/2004 | *Bukiet 9*

**1.** Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz punkt o współrzędnych $(x_0, y_0)$. Uzasadnij, że wykres funkcji $f$ ma środek symetrii w punkcie $(x_0, y_0)$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$.

**2.** Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz prosta o równaniu $x = x_0$. Uzasadnij, że wykres funkcji $f$ ma oś symetrii o równaniu $x = x_0$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

**3. a)** Wykaż, że punkt $(x_2, y_2)$ jest symetryczny do punktu $(x_1, y_1)$ względem prostej o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy

$$y_1 + y_2 = a \cdot (x_1 + x_2) + 2b \quad \text{i} \quad x_1 + ay_1 = x_2 + ay_2.$$

**b)** Uzasadnij, że wykres funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma oś symetrii o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x') = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot f(x) + \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot x + \frac{2b}{a^2 + 1},$$

gdzie

$$x' = \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot f(x) - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot x - \frac{2ab}{a^2 + 1}.$$

## Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

23 II | rok 2003/2004 | *Bukiet 9*

**1.** Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz punkt o współrzędnych $(x_0, y_0)$. Uzasadnij, że wykres funkcji $f$ ma środek symetrii w punkcie $(x_0, y_0)$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$.

**2.** Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz prosta o równaniu $x = x_0$. Uzasadnij, że wykres funkcji $f$ ma oś symetrii o równaniu $x = x_0$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

**3. a)** Wykaż, że punkt $(x_2, y_2)$ jest symetryczny do punktu $(x_1, y_1)$ względem prostej o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy

$$y_1 + y_2 = a \cdot (x_1 + x_2) + 2b \quad \text{i} \quad x_1 + ay_1 = x_2 + ay_2.$$

**b)** Uzasadnij, że wykres funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma oś symetrii o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x') = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot f(x) + \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot x + \frac{2b}{a^2 + 1},$$

gdzie

$$x' = \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot f(x) - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot x - \frac{2ab}{a^2 + 1}.$$

## Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

23 II | rok 2003/2004 | *Bukiet 9*

**1.** Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz punkt o współrzędnych $(x_0, y_0)$. Uzasadnij, że wykres funkcji $f$ ma środek symetrii w punkcie $(x_0, y_0)$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$.

**2.** Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz prosta o równaniu $x = x_0$. Uzasadnij, że wykres funkcji $f$ ma oś symetrii o równaniu $x = x_0$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

**3. a)** Wykaż, że punkt $(x_2, y_2)$ jest symetryczny do punktu $(x_1, y_1)$ względem prostej o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy

$$y_1 + y_2 = a \cdot (x_1 + x_2) + 2b \quad \text{i} \quad x_1 + ay_1 = x_2 + ay_2.$$

**b)** Uzasadnij, że wykres funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma oś symetrii o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x') = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot f(x) + \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot x + \frac{2b}{a^2 + 1},$$

gdzie

$$x' = \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot f(x) - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdot x - \frac{2ab}{a^2 + 1}.$$