Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

6 II rok 2003/2004 *Bukiet 8*

Dana jest liczba rzeczywista $r > 0$.

1. Narysuj w układzie współrzędnych zbiory punktów spełniających równania:

a) $|x| + |y| = r$, **b)** $x^2 + y^2 = r^2$,

c) $|x + y| + |x - y| = 2r$,

d) $x^2 + y^2 = 2r^2$, **e)** $|x| + |y| = 2r$.

2. Uzasadnij algebraicznie, że:

a) jeśli $|x| + |y| \leqslant r$, to $|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant r$ i $x^2 + y^2 \leqslant r^2$;

b) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, to $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;

c) $|x+y|+|x-y| \leqslant r$ dokładnie wtedy, gdy $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;

d) jeśli $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$, to $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$;

e) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to $|xy| \leqslant r^2$ i $|x| + |y| \leqslant 2r$.

Podaj interpretację geometryczną implikacji a), b), d), e).

3. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Pokaż, że jeżeli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to

$$|x - a| + |y - b| \leqslant |a| + |b| + 2r.$$

4. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Wykaż, że jeżeli $|x| + |y| \leqslant r$, to

a) $|x| \cdot (r + 2|a|) + |y| \cdot (r + 2|b|) \leqslant r^2 + 2Mr$;

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant m^2 + (M + r)^2$.

Podaj geometryczne uzasadnienie nierówności b).

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

6 II rok 2003/2004 *Bukiet 8*

Dana jest liczba rzeczywista $r > 0$.

1. Narysuj w układzie współrzędnych zbiory punktów spełniających równania:

a) $|x| + |y| = r$, **b)** $x^2 + y^2 = r^2$,

c) $|x + y| + |x - y| = 2r$,

d) $x^2 + y^2 = 2r^2$, **e)** $|x| + |y| = 2r$.

2. Uzasadnij algebraicznie, że:

a) jeśli $|x| + |y| \leqslant r$, to $|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant r$ i $x^2 + y^2 \leqslant r^2$;

b) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, to $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;

c) $|x+y|+|x-y| \leqslant r$ dokładnie wtedy, gdy $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;

d) jeśli $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$, to $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$;

e) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to $|xy| \leqslant r^2$ i $|x| + |y| \leqslant 2r$.

Podaj interpretację geometryczną implikacji a), b), d), e).

3. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Pokaż, że jeżeli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to

$$|x - a| + |y - b| \leqslant |a| + |b| + 2r.$$

4. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Wykaż, że jeżeli $|x| + |y| \leqslant r$, to

a) $|x| \cdot (r + 2|a|) + |y| \cdot (r + 2|b|) \leqslant r^2 + 2Mr$;

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant m^2 + (M + r)^2$.

Podaj geometryczne uzasadnienie nierówności b).

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

6 II rok 2003/2004 *Bukiet 8*

Dana jest liczba rzeczywista $r > 0$.

1. Narysuj w układzie współrzędnych zbiory punktów spełniających równania:

a) $|x| + |y| = r$, **b)** $x^2 + y^2 = r^2$,

c) $|x + y| + |x - y| = 2r$,

d) $x^2 + y^2 = 2r^2$, **e)** $|x| + |y| = 2r$.

2. Uzasadnij algebraicznie, że:

a) jeśli $|x| + |y| \leqslant r$, to $|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant r$ i $x^2 + y^2 \leqslant r^2$;

b) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, to $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;

c) $|x+y|+|x-y| \leqslant r$ dokładnie wtedy, gdy $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;

d) jeśli $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$, to $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$;

e) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to $|xy| \leqslant r^2$ i $|x| + |y| \leqslant 2r$.

Podaj interpretację geometryczną implikacji a), b), d), e).

3. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Pokaż, że jeżeli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to

$$|x - a| + |y - b| \leqslant |a| + |b| + 2r.$$

4. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Wykaż, że jeżeli $|x| + |y| \leqslant r$, to

a) $|x| \cdot (r + 2|a|) + |y| \cdot (r + 2|b|) \leqslant r^2 + 2Mr$;

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant m^2 + (M + r)^2$.

Podaj geometryczne uzasadnienie nierówności b).

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

6 II rok 2003/2004 *Bukiet 8*

Dana jest liczba rzeczywista $r > 0$.

1. Narysuj w układzie współrzędnych zbiory punktów spełniających równania:

a) $|x| + |y| = r$, **b)** $x^2 + y^2 = r^2$,

c) $|x + y| + |x - y| = 2r$,

d) $x^2 + y^2 = 2r^2$, **e)** $|x| + |y| = 2r$.

2. Uzasadnij algebraicznie, że:

a) jeśli $|x| + |y| \leqslant r$, to $|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant r$ i $x^2 + y^2 \leqslant r^2$;

b) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, to $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;

c) $|x+y|+|x-y| \leqslant r$ dokładnie wtedy, gdy $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;

d) jeśli $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$, to $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$;

e) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to $|xy| \leqslant r^2$ i $|x| + |y| \leqslant 2r$.

Podaj interpretację geometryczną implikacji a), b), d), e).

3. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Pokaż, że jeżeli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to

$$|x - a| + |y - b| \leqslant |a| + |b| + 2r.$$

4. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Wykaż, że jeżeli $|x| + |y| \leqslant r$, to

a) $|x| \cdot (r + 2|a|) + |y| \cdot (r + 2|b|) \leqslant r^2 + 2Mr$;

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant m^2 + (M + r)^2$.

Podaj geometryczne uzasadnienie nierówności b).