12 XII rok 2003/2004 *Bukiet 6*

Dana jest liczba pierwsza p i liczba naturalna $n \geqslant 1$.

1. Uzasadnij, że każdą liczbę naturalną $m \geqslant 1$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $p^k \cdot r$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, a r jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p. Nazwijmy liczbę r **częścią wolną od p** liczby m.

2. Zauważ, że iloraz dwóch liczb naturalnych jest potęgą liczby p o wykładniku całkowitym dokładnie wtedy, gdy części wolne od p tych liczb są równe.

3. Wyznacz zbiór części wolnych od p liczb $1, 2, 3, \ldots, np$.

4. Udowodnij, że jeśli wybierzemy dowolne $n \cdot (p-1)+1$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to iloraz pewnych dwóch spośród wybranych liczb będzie potęgą liczby p.

5. Czy jeśli wybierzemy $n \cdot (p-1)$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to zawsze wśród wybranych liczb będą dwie takie, których iloraz jest potęgą liczby p?

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

12 XII rok 2003/2004 *Bukiet 6*

Dana jest liczba pierwsza p i liczba naturalna $n \geqslant 1$.

1. Uzasadnij, że każdą liczbę naturalną $m \geqslant 1$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $p^k \cdot r$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, a r jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p. Nazwijmy liczbę r **częścią wolną od p** liczby m.

2. Zauważ, że iloraz dwóch liczb naturalnych jest potęgą liczby p o wykładniku całkowitym dokładnie wtedy, gdy części wolne od p tych liczb są równe.

3. Wyznacz zbiór części wolnych od p liczb $1, 2, 3, \ldots, np$.

4. Udowodnij, że jeśli wybierzemy dowolne $n \cdot (p-1)+1$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to iloraz pewnych dwóch spośród wybranych liczb będzie potęgą liczby p.

5. Czy jeśli wybierzemy $n \cdot (p-1)$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to zawsze wśród wybranych liczb będą dwie takie, których iloraz jest potęgą liczby p?

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

12 XII rok 2003/2004 *Bukiet 6*

Dana jest liczba pierwsza p i liczba naturalna $n \geqslant 1$.

1. Uzasadnij, że każdą liczbę naturalną $m \geqslant 1$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $p^k \cdot r$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, a r jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p. Nazwijmy liczbę r **częścią wolną od p** liczby m.

2. Zauważ, że iloraz dwóch liczb naturalnych jest potęgą liczby p o wykładniku całkowitym dokładnie wtedy, gdy części wolne od p tych liczb są równe.

3. Wyznacz zbiór części wolnych od p liczb $1, 2, 3, \ldots, np$.

4. Udowodnij, że jeśli wybierzemy dowolne $n \cdot (p-1)+1$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to iloraz pewnych dwóch spośród wybranych liczb będzie potęgą liczby p.

5. Czy jeśli wybierzemy $n \cdot (p-1)$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to zawsze wśród wybranych liczb będą dwie takie, których iloraz jest potęgą liczby p?

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

12 XII rok 2003/2004 *Bukiet 6*

Dana jest liczba pierwsza p i liczba naturalna $n \geqslant 1$.

1. Uzasadnij, że każdą liczbę naturalną $m \geqslant 1$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $p^k \cdot r$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, a r jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p. Nazwijmy liczbę r **częścią wolną od p** liczby m.

2. Zauważ, że iloraz dwóch liczb naturalnych jest potęgą liczby p o wykładniku całkowitym dokładnie wtedy, gdy części wolne od p tych liczb są równe.

3. Wyznacz zbiór części wolnych od p liczb $1, 2, 3, \ldots, np$.

4. Udowodnij, że jeśli wybierzemy dowolne $n \cdot (p-1)+1$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to iloraz pewnych dwóch spośród wybranych liczb będzie potęgą liczby p.

5. Czy jeśli wybierzemy $n \cdot (p-1)$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to zawsze wśród wybranych liczb będą dwie takie, których iloraz jest potęgą liczby p?