24 X rok 2003/2004 *Bukiet 3*

1. Przedstaw każdą z funkcji $\sin 2x$, $\sin 3x$ i $\sin 4x$ w postaci $F(\cos x)\cdot\sin x$, a każdą z funkcji $\cos 2x$, $\cos 3x$ i $\cos 4x$ w postaci $G(\cos x)$, gdzie F i G są wielomianami.

2. Określmy ciągi wielomianów (P_n) i (Q_n), $n=0,1,2,\ldots$, następująco:

$$P_0(y)=1,\ P_1(y)=2y,\ P_{n+1}(y)=2yP_n(y)-P_{n-1}(y),\ n\geqslant 1,$$

$$Q_0(y)=1,\ Q_1(y)=y,\ Q_{n+1}(y)=2yQ_n(y)-Q_{n-1}(y), n\geqslant 1.$$

a) Wyznacz wielomiany P_n i Q_n dla $n=2,3,4$ i porównaj je z wielomianami z zadania 1.

b) Udowodnij indukcyjnie, że wielomiany P_n i Q_n spełniają warunki

$$\begin{cases} \sin(n+1)x = P_n(\cos x)\cdot\sin x \\ \cos nx = Q_n(\cos x) \end{cases}$$

dla dowolnego n.

c) Wykaż, że wielomiany P_n i Q_n są stopnia n oraz są funkcjami parzystymi dla parzystych n i nieparzystymi dla nieparzystych n.

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

24 X rok 2003/2004 *Bukiet 3*

1. Przedstaw każdą z funkcji $\sin 2x$, $\sin 3x$ i $\sin 4x$ w postaci $F(\cos x)\cdot\sin x$, a każdą z funkcji $\cos 2x$, $\cos 3x$ i $\cos 4x$ w postaci $G(\cos x)$, gdzie F i G są wielomianami.

2. Określmy ciągi wielomianów (P_n) i (Q_n), $n=0,1,2,\ldots$, następująco:

$$P_0(y)=1,\ P_1(y)=2y,\ P_{n+1}(y)=2yP_n(y)-P_{n-1}(y),\ n\geqslant 1,$$

$$Q_0(y)=1,\ Q_1(y)=y,\ Q_{n+1}(y)=2yQ_n(y)-Q_{n-1}(y), n\geqslant 1.$$

a) Wyznacz wielomiany P_n i Q_n dla $n=2,3,4$ i porównaj je z wielomianami z zadania 1.

b) Udowodnij indukcyjnie, że wielomiany P_n i Q_n spełniają warunki

$$\begin{cases} \sin(n+1)x = P_n(\cos x)\cdot\sin x \\ \cos nx = Q_n(\cos x) \end{cases}$$

dla dowolnego n.

c) Wykaż, że wielomiany P_n i Q_n są stopnia n oraz są funkcjami parzystymi dla parzystych n i nieparzystymi dla nieparzystych n.

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

24 X rok 2003/2004 *Bukiet 3*

1. Przedstaw każdą z funkcji $\sin 2x$, $\sin 3x$ i $\sin 4x$ w postaci $F(\cos x)\cdot\sin x$, a każdą z funkcji $\cos 2x$, $\cos 3x$ i $\cos 4x$ w postaci $G(\cos x)$, gdzie F i G są wielomianami.

2. Określmy ciągi wielomianów (P_n) i (Q_n), $n=0,1,2,\ldots$, następująco:

$$P_0(y)=1,\ P_1(y)=2y,\ P_{n+1}(y)=2yP_n(y)-P_{n-1}(y),\ n\geqslant 1,$$

$$Q_0(y)=1,\ Q_1(y)=y,\ Q_{n+1}(y)=2yQ_n(y)-Q_{n-1}(y), n\geqslant 1.$$

a) Wyznacz wielomiany P_n i Q_n dla $n=2,3,4$ i porównaj je z wielomianami z zadania 1.

b) Udowodnij indukcyjnie, że wielomiany P_n i Q_n spełniają warunki

$$\begin{cases} \sin(n+1)x = P_n(\cos x)\cdot\sin x \\ \cos nx = Q_n(\cos x) \end{cases}$$

dla dowolnego n.

c) Wykaż, że wielomiany P_n i Q_n są stopnia n oraz są funkcjami parzystymi dla parzystych n i nieparzystymi dla nieparzystych n.

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

24 X rok 2003/2004 *Bukiet 3*

1. Przedstaw każdą z funkcji $\sin 2x$, $\sin 3x$ i $\sin 4x$ w postaci $F(\cos x)\cdot\sin x$, a każdą z funkcji $\cos 2x$, $\cos 3x$ i $\cos 4x$ w postaci $G(\cos x)$, gdzie F i G są wielomianami.

2. Określmy ciągi wielomianów (P_n) i (Q_n), $n=0,1,2,\ldots$, następująco:

$$P_0(y)=1,\ P_1(y)=2y,\ P_{n+1}(y)=2yP_n(y)-P_{n-1}(y),\ n\geqslant 1,$$

$$Q_0(y)=1,\ Q_1(y)=y,\ Q_{n+1}(y)=2yQ_n(y)-Q_{n-1}(y), n\geqslant 1.$$

a) Wyznacz wielomiany P_n i Q_n dla $n=2,3,4$ i porównaj je z wielomianami z zadania 1.

b) Udowodnij indukcyjnie, że wielomiany P_n i Q_n spełniają warunki

$$\begin{cases} \sin(n+1)x = P_n(\cos x)\cdot\sin x \\ \cos nx = Q_n(\cos x) \end{cases}$$

dla dowolnego n.

c) Wykaż, że wielomiany P_n i Q_n są stopnia n oraz są funkcjami parzystymi dla parzystych n i nieparzystymi dla nieparzystych n.