Internetowe Kółko Matematyczne 2003/2004

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw I* (5 IX)

Zadanie 1. Które liczby całkowite można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych?

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ (x^2-y^2)(x^3-y^3) &= 2432. \end{cases}$$

Zadanie 3. Czy liczby naturalne od 1 do n^2+n można ustawić w tablicy $n \times (n+1)$ w ten sposób, by równe były sumy liczb w każdym wierszu i równe były sumy liczb w każdej kolumnie.

Zadanie 4. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c. Znajdź funkcję f, spełniającą dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x) + b \cdot f(a-x) = c.$$

Zadanie 5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykaż, że

$$\frac{|BP|}{|AP|} = \frac{|BC|}{|AD|},$$

gdzie P jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD.

Zestaw II (19 IX)

Zadanie 1. Udowodnij, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$ liczba $\sqrt{3n+2}$ jest niewymierna.

Zadanie 2. Dane są liczby naturalne $m, n, r \geqslant 1$. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(km+r)((k+1)m+r)}.$$

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie funkcje postaci

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (oraz $c \neq 0$ lub $d \neq 0$), takie, że $f(f(x)) = x$ dla każdego x z dziedziny funkcji f.

Zadanie 4. Znajdź długość dwusiecznej kąta prostego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b.

Zadanie 5. Niech O_n oznacza obwód n-kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1. Wykaż, że ciąg $(O_n)_{n=3}^{\infty}$ jest malejący i ograniczony z dołu. Znajdź jego granicę. To samo zadanie w przypadku, gdy O_n oznacza obwód n-kąta foremnego o polu równym 1.

Zestaw III (10 X)

Zadanie 1. Uzasadnij, że jeżeli liczba całkowita n nie dzieli się przez 5, to liczba n^4+4 dzieli się przez 5.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$1^1 + 2^2 + \ldots + n^n < (n+1)^{n+1}.$$

Zadanie 3. Znajdź długości boków trójkąta, którego wysokości wynoszą $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{5}$.

Zadanie 4. Wysokość i środkowa, poprowadzone z wierzchołka trójkąta, dzielą kąt przy tym wierzchołku na trzy równe części. Znajdź kąty tego trójkąta.

Zadanie 5. Czy istnieje wielościan, którego wszystkie ściany mają różne liczby boków?

Zestaw IV (31 X)

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to

$$\frac{n^3 + 2003n}{6}$$

też jest liczbą całkowitą.

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli

$$x^2 + x = y^2 + y = z^2 + z,$$

to $x = y$ lub $y = z$, lub $z = x$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1) \geqslant 2^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Zadanie 4. Trapez równoramienny o podstawach długości a i b jest opisany na okręgu. Wyznacz promień tego okręgu.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC. Na bokach tego trójkąta budujemy trzy trójkąty równoboczne: trójkąt ABD do wewnątrz trójkąta ABC, a trójkąty BCE i CAF na zewnątrz. Wykaż, że punkty C, D, E, F są wierzchołkami równoległoboku lub leżą na jednej prostej.

Zestaw V (21 XI)

Zadanie 1. Udowodnij równość

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}+\underbrace{33\ldots3}_{n}=\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n}.$$

Zadanie 2. Wykaż, że liczba n^6-n^2 jest podzielna przez 60 dla dowolnego całkowitego n.

Zadanie 3. Rozwiąż równanie $x\cdot[x]=10$, gdzie symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Zadanie 4. Uzasadnij, że jeżeli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek

$$\frac{a^n+b^n}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

dla $n=2$, to spełniają ten warunek dla dowolnego naturalnego n.

Zadanie 5. Wykaż, że w każdym trójkącie stosunek długości pewnych dwóch boków jest większy od 1 i mniejszy od $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Zestaw VI (5 XII)

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie trójki liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunki

$$a=\frac{b+c}{2}\quad \text{i} \quad c=\sqrt{ab}.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnego rzeczywistego x zachodzi równość

$$[x]+[x+\tfrac{1}{2}]=[2x].$$

Zadanie 3. Znajdź najmniejszą liczbę s, dla której istnieją liczby rzeczywiste b i c takie, że nierówność

$$|x^2+bx+c|\leqslant s$$

zachodzi dla każdego $x\in[-1,1]$.

Zadanie 4. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, to liczby $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ też są długościami boków trójkąta.

Zadanie 5. W pewnym czworokącie przekątne są dwusiecznymi kątów wewnętrznych. Jaki to czworokąt?

Zestaw VII (9 I)

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych $k, l, m \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$2 \cdot (k! + l! + m!) \leqslant (k + l + m)!$$

Zadanie 2. Na ile sposobów możemy ustawić liczby 1, 2, 3, 4, 5 w ciąg, w którym dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$ liczba k nie stoi na k-tym miejscu?

Zadanie 3. Oblicz sumy:

$$\text{a)} \quad \sum m_1 m_2 \dots m_k, \qquad \text{b)} \quad \sum \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_k},$$

gdzie wyrażenia po lewej stronie równości oznaczają odpowiednio sumy (symbol $\sum$) wyrażeń postaci

$$\text{a)} \quad m_1 m_2 \dots m_k, \qquad \text{b)} \quad \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_k},$$

po wszystkich układach liczb $m_1, m_2, \dots, m_k$ takich, że $1 \leqslant m_1 < m_2 < \dots < m_k \leqslant n$.

Zadanie 4. Na boku AB prostokąta $ABCD$ obrano taki punkt P, że trójkąty ADP i BPC są podobne. Wykaż, że do każdego z tych trójkątów jest podobny trójkąt PCD. Jaką zależność muszą spełniać długości boków prostokąta, aby istniał punkt P o podanej własności?

Zadanie 5. Dane są liczby dodatnie p i q. Które z czworokątów o przekątnych długości p i q mają największe pole?

Zestaw VIII (30 I)

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnego całkowitego $n \geqslant 0$ liczba $4^{2n} - 15n - 1$ jest podzielna przez 225.

Zadanie 2. Oblicz $[\sqrt{\underbrace{11\dots1}_{2n}}]$.

Zadanie 3. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Rozwiąż równanie

$$\sin ax + \cos bx = 0.$$

Zadanie 4. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty K i L. Mając dane pola trójkątów ABP, APK i BPL, oblicz pole czworokąta $CKPL$.

Zadanie 5. Uzasadnij, że jeśli dowolny płaski przekrój pewnej bryły jest kołem, to ta bryła jest kulą.

Zestaw IX (13 II)

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$m^n = 729$$

w liczbach naturalnych m, n.

Zadanie 2. Uzasadnij, że jeżeli p, q i r są różnymi liczbami pierwszymi, to suma $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ nie jest odwrotnością liczby naturalnej.

Zadanie 3. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $a+b \geqslant 0$, to zachodzi nierówność

$$(a^2+b^2)(a^5+b^5) \geqslant (a^3+b^3)(a^4+b^4),$$

a jeżeli spełniają warunek $a+b \leqslant 0$, to zachodzi nierówność

$$(a^2+b^2)(a^5+b^5) \leqslant (a^3+b^3)(a^4+b^4).$$

Zadanie 4. Dana jest funkcja kwadratowa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz liczby rzeczywiste $x_1 < x_2$ i $y_1 < y_2$. Wykaż, że jeżeli liczby $f(x_1)$, $f(x_2)$ i $f(\frac{x_1+x_2}{2})$ leżą w przedziale $[y_1, y_2]$, to dla każdego $x \in [x_1, x_2]$ liczba $f(x)$ leży w przedziale $[\frac{9}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2, \frac{9}{8}y_2 - \frac{1}{8}y_1]$.

Zadanie 5. Mając daną miarę kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, oblicz stosunek promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zestaw X (15 III)

Zadanie 1. Podaj przykład n kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest liczbą pierwszą.

Zadanie 2. Wykaż, że dla dowolnego naturalnego n liczby $2n+3$ i $3n+4$ są względnie pierwsze.

Zadanie 3. Dane są liczby naturalne m i n takie, że $m > n+1$. Uzasadnij, że liczba $\frac{m^n-1}{m-1}$ jest całkowita i znajdź jej resztę z dzielenia przez $m-1$.

Zadanie 4. Mając dane $\sin x \cdot \cos x = a$, oblicz $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Zadanie 5. Na przeciwprostokątnej BC równoramiennego trójkąta prostokątnego ABC obrano dowolny punkt D. Uzasadnij, że pozostałe dwa wierzchołki kwadratu o przekątnej AD są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABD i ACD.

Zestaw XI (29 III)

Zadanie 1. Znajdź największą potęgę liczby 2, przez którą dzieli się liczba $\frac{(2n)!}{n!}$.

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x+2y = xy \\ y+3z = yz \\ z+4x = zx. \end{cases}$$

Zadanie 3. Dane są liczby dodatnie a i b. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość wyrażenia x^2+y^2 dla liczb x, y spełniających warunek $ax+by=1$?

Zadanie 4. Udowodnij, że w trójkącie ABC środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|AC|^2+|BC|^2=5\cdot|AB|^2.$$

Zadanie 5. Znajdź wysokość trapezu, którego kolejne boki mają długości 2, 3, 5 i 4.

Zestaw XII (26 IV)

Zadanie 1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych nieujemnych m, n, dla których $m^2=2^n+1$.

Zadanie 2. Wiadomo, że $a-\frac{1}{a}=2$. Oblicz $a^3-\frac{1}{a^3}$.

Zadanie 3. Udowodnij nierówność

$$x^2+y^2+1\geqslant xy+x+y$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y.

Zadanie 4. Dana jest liczba naturalna n. Oblicz sumę

$$1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n.$$

Zadanie 5. Na płaszczyźnie dane są dwa trójkąty równoboczne ABC i DEF takie, że punkt C leży na prostej DE, a punkt F leży na prostej AB. Wykaż, że jeżeli $B\neq D$ i $A\neq E$, to proste BD i AE są równoległe.

Zestaw XIII (10 V)

Zadanie 1. Wykaż, że $\frac{1}{4}n^4+n^3-\frac{1}{4}n^2-n$ jest liczbą całkowitą podzielną przez 3 dla każdego całkowitego n.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby naturalne $n > 1$ o tej własności, że kwadrat dowolnej liczby pierwszej większej od 3 daje przy dzieleniu przez n resztę 1.

Zadanie 3. Uzasadnij, że jeśli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$a^2 + b^2 > \frac{c^2}{2}.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że jeżeli suma m pierwszych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego jest równa sumie jego n pierwszych wyrazów, przy czym $m \neq n$, to suma $m + n$ pierwszych wyrazów tego ciągu jest równa 0.

Zadanie 5. Dany jest sześciokąt, który ma trzy pary boków równoległych i można w niego wpisać okrąg. Uzasadnij, że ten sześciokąt ma trzy pary boków równych.

Zestaw XIV (24 V)

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p mniejsze od 20, o tej własności, że liczba $n^2 + n + 1$ nie jest podzielna przez p dla żadnego całkowitego n.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeżeli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 2 ani przez 5, to istnieje liczba naturalna k taka, że liczba

$$\underbrace{11\ldots11}_{k}$$

jest podzielna przez n.

Zadanie 3. Co możemy powiedzieć o znakach liczb a, b, c, jeśli znamy znaki liczb

$$a + b + c, \qquad ab + bc + ca, \qquad abc?$$

Zadanie 4. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c i przeciwległych kątach o miarach odpowiednio α, β i γ. Udowodnij, że jeżeli liczby α, β, γ tworzą ciąg arytmetyczny, to sinus różnicy tego ciągu jest równy $\frac{c-a}{2R}$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na danym trójkącie.

Zadanie 5. Znajdź najmniejszą liczbę dodatnią r o tej własności, że każdy czworokąt o bokach długości nie większej od 1 jest zawarty w pewnym kole o promieniu r.

Wskazówki do zadań

Zestaw I

1. Oblicz np. różnicę kwadratów kolejnych liczb całkowitych.

2. Korzystając z pierwszego równania, możesz $x^2 + y^2$ wyrazić przez xy. To się przyda w drugim równaniu.

3. Co można powiedzieć o sumie liczb w każdym wierszu, a co o sumie liczb w każdej kolumnie?

4. Za x podstaw $a - x$.

5. Zwróć uwagę na trójkąty ADP i BCP.

Zestaw II

1. Przypuśćmy, że ta liczba jest wymierna. Przekształć otrzymaną równość i zwróć uwagę na reszty z dzielenia przez 3.

2. Pomnóż sumę przez m i przedstaw każdy składnik w postaci różnicy dwóch ułamków.

4. Zauważ, że ta dwusieczna jest przekątną pewnego kwadratu.

5. Połącz środek okręgu z wierzchołkami n-kąta i przyjrzyj się utworzonym trójkątom.

Zestaw III

1. Jaką resztę przy dzieleniu przez 5 może dać kwadrat, a jaką czwarta potęga liczby całkowitej? Drugi sposób: Pokaż, że $n^4 - 1$ jest podzielne przez 5.

2. Ile składników liczy suma po lewej stronie? Który z nich jest największy?

3. Oznacz przez P pole szukanego trójkąta i znajdź długości jego boków. Jaki to jest trójkąt?

4. Zajmij się trójkątem prostokątnym.

5. Rozważ ścianę o największej liczbie boków i zastanów się nad liczbą ścian wielościanu.

Zestaw IV

1. Liczba 2004 dzieli się przez 6.

2. W każdej z obu równości przenieś wszystko na lewą stronę i spróbuj coś wyłączyć. Drugi sposób: wykorzystaj funkcję kwadratową $f(t) = t^2 + t$.

3. Skorzystaj z nierówności $a + b \geqslant \ldots$

4. Jeśli czworokąt jest opisany na okręgu, to zachodzi pewna prosta zależność między długościami jego boków.

5. Przyjrzyj się trójkątom BDE i ADF.

Zestaw V

1. Obie strony są podzielne przez pewną (dużą) liczbę.

2. Przedstaw daną liczbę w postaci iloczynu.

3. Rozważ oddzielnie $x \geqslant 0$ i $x < 0$. Oznacz $[x]$ przez n. Spróbuj z danego równania dowiedzieć się czegoś o n.

4. Napisz warunek dla $n = 2$ i przekształć go do najprostszej postaci.

5. Przypuśćmy, że w pewnym trójkącie ten warunek nie jest spełniony. Zbadaj nierówność trójkąta.

Zestaw VI

2. Oznacz $[x]$ przez n. Przedział, w którym leży x, podziel na dwie części.

3. Znajdź największą wartość funkcji $x \mapsto |x^2 + bx + c|$ w przedziale $[-1, 1]$.

4. Liczby dodatnie a, b, c są długościami boków trójkąta dokładnie wtedy, gdy spełniają pewne nierówności.

5. Przyjrzyj się trójkątom, na które jedna przekątna dzieli czworokąt.

Zestaw VII

1. Niech np. m będzie największą z danych liczb. Oszacuj, w zależności tylko od m, wyrażenie po lewej stronie nierówności.

3. Jak zmieni się każda z sum, gdy „przejdziemy” od n do $n + 1$?

4. Trójkąty ADP i BPC są prostokątne. Wystarczy przyjrzeć się przyprostokątnym.

5. Skorzystaj ze wzoru na pole czworokąta w zależności m.in. od długości przekątnych (ewentualnie wyprowadź taki wzór).

Zestaw VIII

1. Skorzystaj ze wzoru na $(a+b)^n$. Drugi sposób: zajmij się najpierw podzielnością przez 15.

2. Wyraź $\underbrace{99\ldots9}_{2n}$ przez potęgę liczby 10.

3. Przenieś cos na prawą stronę i zamień na sin. Kiedy sinusy dwóch liczb są równe?

4. Najpierw oblicz pole trójkąta PKL.

5. Rozważ przekrój o największej średnicy.

Zestaw IX

1. Rozłóż liczbę 729 na czynniki pierwsze.

2. Przedstaw tę sumę w postaci ułamka. Czy jest to ułamek skracalny?

3. Wymnóż nawiasy, przenieś wszystko na jedną stronę i (po skróceniu odpowiednich składników) spróbuj coś wyłączyć.

4. Jeśli współrzędna x_0 wierzchołka paraboli leży poza przedziałem $[x_1, x_2]$, to funkcja jest monotoniczna w przedziale $[x_1, x_2]$. Jeśli np. $x_0 \in [x_1, \frac{x_1+x_2}{2}]$ i $a > 0$, to rozważ przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości mniejsze od y_1.

5. Gdzie leży środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym? Następnie przyjrzyj się odcinkom łączącym wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego.

Zestaw X

1. Tu może się przydać silnia.

2. Wspólne dzielniki liczb a i b są takie same jak wspólne dzielniki liczb $a - b$ i b.

3. Korzystając ze znanego wzoru łatwo napisać, czemu jest równy dany ułamek. Następnie tak przekształć to wyrażenie, aby „powyłączać” $m - 1$. Drugi sposób: niech $m' = m - 1$.

4. Zastanów się, jak skorzystać z jedynki trygonometrycznej.

5. Rozważane wierzchołki kwadratu leżą na symetralnej odcinka AD, więc wystarczy pokazać, że jeden z nich leży na symetralnej odcinka AB, a drugi na symetralnej odcinka AC.

Zestaw XI

1. Rozwiąż zadanie dla małych n i swoją hipotezę udowodnij indukcyjnie. Drugi sposób: przyjrzyj się parzystym czynnikom licznika.

2. Przekształć równania układu tak, aby otrzymać układ, który łatwo jest rozwiązać.

3. Wyraź np. y przez x. Drugi sposób: interpretacja geometryczna.

4. Można to udowodnić korzystając z własności iloczynu skalarnego wektorów, ale są też inne sposoby.

5. Sprowadź zadanie do wyznaczenia wysokości pewnego trójkąta.

Zestaw XII

1. Przenieś „1” na lewą stronę równania.

2. Podnieś obie strony danej równości do trzeciej potęgi.

3. Pomnóż obie strony nierówności przez 2.

4. Oznacz daną sumę przez S i napisz, czemu jest równe $2S$.

5. Pewne punkty leżą na jednym okręgu.

Zestaw XIII

1. Przedstaw dane wyrażenie w postaci ułamka. Licznik tego ułamka rozłóż na czynniki.

2. Sprawdź najpierw kilka małych liczb pierwszych, postaw hipotezę ogólną i ją udowodnij.

3. Skorzystaj z nierówności trójkąta.

4. Skorzystaj ze wzoru na sumę n (odp. m, $m+n$) pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego, w zależności od wyrazu pierwszego i różnicy tego ciągu.

5. Zauważ, że środek okręgu jest środkiem symetrii danego sześciokąta.

Zestaw XIV

1. Zauważ, że jeśli n^2+n+1 nie jest podzielne przez p dla $n = 0, 1, \ldots, p-1$, to nie jest podzielne przez p dla żadnego naturalnego n.

2. Rozważ dane liczby dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ i skorzystaj z zasady szufladkowej Dirichleta.

3. Zbadaj znaki danych wyrażeń w zależności od znaków liczb a, b, c.

4. Znajdź najpierw β.