Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

12 IX rok 2003/2004 *Bukiet 1*

1. Udowodnij, że jeżeli $x \geqslant 4$, to:

a) $x^4 - 4x^3 \geqslant 0$ i $x^3 - 4x^2 \geqslant 0$;

b) $x^4 - 3x^3 - 4x^2 \geqslant 0$;

c) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$.

2. Udowodnij, że jeżeli $x \geqslant 5$, to

$$x^3 - 3x^2 - 6x - 15 \geqslant 0.$$

3. Udowodnij, że jeżeli $x \geqslant 2$, to

$$x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 1 \geqslant 0.$$

3 X *Bukiet 2*

Symbolem $\prod_{k=m}^{n} a_k$ oznaczamy iloczyn $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$, na przykład

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

1. **a)** Zauważ, że $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.

b) Korzystając z punktu a) rozpisz iloczyn $\prod_{k=2}^{8}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ i oblicz go.

c) Oblicz iloczyn

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right),$$

gdzie $n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną.

2. **a)** Rozłóż na czynniki licznik i mianownik ułamka $\frac{k^2-k-2}{k^2+2k-3}$ i oblicz iloczyn

$$\prod_{k=3}^{n}\frac{k^2 - k - 2}{k^2 + 2k - 3}.$$

b) W podobny sposób oblicz iloczyn

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{3k^2 + 2k - 1}{3k^2 - k - 2}.$$

c) Oblicz iloczyn

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

3. Dana jest liczba rzeczywista $r > 0$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{r-1}{n(n+r)}\right) < r.$$

24 X *Bukiet 3*

1. Przedstaw każdą z funkcji $\sin 2x$, $\sin 3x$ i $\sin 4x$ w postaci $F(\cos x) \cdot \sin x$, a każdą z funkcji $\cos 2x$, $\cos 3x$ i $\cos 4x$ w postaci $G(\cos x)$, gdzie F i G są wielomianami.

2. Określmy ciągi wielomianów (P_n) i (Q_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, następująco:

$$P_0(y) = 1,\ P_1(y) = 2y,\ P_{n+1}(y) = 2yP_n(y) - P_{n-1}(y) \text{ dla } n \geqslant 1,$$

$$Q_0(y) = 1,\ Q_1(y) = y,\ Q_{n+1}(y) = 2yQ_n(y) - Q_{n-1}(y) \text{ dla } n \geqslant 1.$$

a) Wyznacz wielomiany P_n i Q_n dla $n = 2, 3, 4$ i porównaj je z wielomianami z zadania 1.

b) Udowodnij indukcyjnie, że wielomiany P_n i Q_n spełniają warunki

$$\begin{cases} \sin(n+1)x &= P_n(\cos x) \cdot \sin x \\ \cos nx &= Q_n(\cos x) \end{cases}$$

dla dowolnego n.

c) Wykaż, że wielomiany P_n i Q_n są stopnia n oraz są funkcjami parzystymi dla parzystych n i nieparzystymi dla nieparzystych n.

14 XI *Bukiet 4*

1. Dany jest zbiór n-elementowy. Wybieramy kolejno różne elementy $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tego zbioru.

a) Na ile sposobów możemy dla danego elementu a_1 dobrać drugi (różny od niego) element a_2?

b) Na ile sposobów do danej pary (a_1, a_2) możemy dobrać trzeci element a_3, różny od a_1 i a_2?

c) Ile jest wszystkich par (a_1, a_2), $a_1 \neq a_2$, utworzonych z elementów zbioru n-elementowego? Ile jest trójek (a_1, a_2, a_3), w których a_1, a_2, a_3 są różnymi elementami tego zbioru?

d) Niech $k \leqslant n$. Ile jest k-wyrazowych ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ utworzonych z różnych elementów danego zbioru n-elementowego?

e) Na ile sposobów możemy wszystkie elementy danego zbioru n-elementowego ustawić w ciąg?

2. Chcemy wybrać k-elementowy podzbiór danego zbioru n-elementowego.

a) Ile ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, o których mowa w zadaniu 1d), daje ten sam podzbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$?

b) Ile jest k-elementowych podzbiorów danego zbioru n-elementowego?

28 XI *Bukiet 5*

1. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$-\sqrt{2} \leqslant \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}.$$

2. Udowodnij, że dla każdego $x \in [-1, 1]$ zachodzi równość

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

3. Udowodnij, że dla każdego $x \in [-1, 1]$ zachodzą następujące nierówności:

a) $\cos(\arcsin x) < \arcsin(\cos x)$,

b) $\sin(\arccos x) < \cos(\arcsin x)$.

12 XII *Bukiet 6*

Dana jest liczba pierwsza p i liczba naturalna $n \geqslant 1$.

1. Uzasadnij, że każdą liczbę naturalną $m \geqslant 1$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $p^k \cdot r$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, a r jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p. Nazwijmy liczbę r **częścią wolną od** $\boldsymbol{p}$ liczby m.

2. Zauważ, że iloraz dwóch liczb naturalnych jest potęgą liczby p o wykładniku całkowitym dokładnie wtedy, gdy części wolne od p tych liczb są równe.

3. Wyznacz zbiór części wolnych od p liczb $1, 2, 3, \ldots, np$.

4. Udowodnij, że jeśli wybierzemy dowolne $n \cdot (p-1) + 1$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to iloraz pewnych dwóch spośród wybranych liczb będzie potęgą liczby p.

5. Czy jeśli wybierzemy $n \cdot (p-1)$ liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, np\}$, to zawsze wśród wybranych liczb będą dwie takie, których iloraz jest potęgą liczby p?

16 I *Bukiet 7*

1. Wykaż, że jeżeli $x \leqslant 1$ i $y \geqslant 1$, to

$$x + y \geqslant xy + 1.$$

2. Udowodnij indukcyjnie, że jeśli iloczyn liczb dodatnich x_1, x_2, …, x_n wynosi 1, to

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a_1, a_2, …, a_n zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

4. Rozstrzygnij, kiedy w powyższych nierównościach zachodzą równości.

6 II *Bukiet 8*

Dana jest liczba rzeczywista $r > 0$.

1. Narysuj w układzie współrzędnych zbiory punktów spełniających równania:

a) $|x| + |y| = r$, **b)** $x^2 + y^2 = r^2$,

c) $|x + y| + |x - y| = 2r$, **d)** $x^2 + y^2 = 2r^2$, **e)** $|x| + |y| = 2r$.

2. Uzasadnij algebraicznie, że:
a) jeśli $|x| + |y| \leqslant r$, to $|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant r$ i $x^2 + y^2 \leqslant r^2$;
b) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, to $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;
c) $|x + y| + |x - y| \leqslant r$ dokładnie wtedy, gdy $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$;
d) jeśli $|x| \leqslant r$ i $|y| \leqslant r$, to $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$;
e) jeśli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to $|xy| \leqslant r^2$ i $|x| + |y| \leqslant 2r$.
Podaj interpretację geometryczną implikacji a), b), d), e).

3. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Pokaż, że jeżeli $x^2 + y^2 \leqslant 2r^2$, to

$$|x - a| + |y - b| \leqslant |a| + |b| + 2r.$$

4. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Niech $m = \min\{a, b\}$, $M = \max\{a, b\}$. Wykaż, że jeżeli $|x| + |y| \leqslant r$, to
a) $|x| \cdot (r + 2|a|) + |y| \cdot (r + 2|b|) \leqslant r^2 + 2Mr$;
b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant m^2 + (M + r)^2$.
Podaj geometryczne uzasadnienie nierówności b).

23 II *Bukiet 9*

1. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz punkt o współrzędnych (x_0, y_0). Uzasadnij, że wykres funkcji f ma środek symetrii w punkcie (x_0, y_0) dokładnie wtedy, gdy funkcja f spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$.

2. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz prosta o równaniu $x = x_0$. Uzasadnij, że wykres funkcji f ma oś symetrii o równaniu $x = x_0$ dokładnie wtedy, gdy funkcja f spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

3. a) Wykaż, że punkt (x_2, y_2) jest symetryczny do punktu (x_1, y_1) względem prostej o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy

$$y_1 + y_2 = a \cdot (x_1 + x_2) + 2b \quad \text{i} \quad x_1 + ay_1 = x_2 + ay_2.$$

b) Uzasadnij, że wykres funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma oś symetrii o równaniu $y = ax+b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dokładnie wtedy, gdy funkcja f spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x') = \frac{a^2-1}{a^2+1} \cdot f(x) + \frac{2a}{a^2+1} \cdot x + \frac{2b}{a^2+1},$$

gdzie

$$x' = \frac{2a}{a^2+1} \cdot f(x) - \frac{a^2-1}{a^2+1} \cdot x - \frac{2ab}{a^2+1}.$$

22 III *Bukiet 10*

1. Wymnóż wszystkie nawiasy:

$$(x^2 - (y-z)^2)(x^2 - (y+z)^2).$$

2. Rozłóż na czynniki wyrażenie

$$a^8 + b^8 + c^8 - 2a^4b^4 - 2b^4c^4 - 2c^4a^4.$$

3. Wykaż, że liczby dodatnie a, b, c są długościami boków trójkąta prostokątnego dokładnie wtedy, gdy

$$2 \cdot (a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2.$$

19 IV *Bukiet 11*

Dane są zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ określamy

$$w_i(x) = W(x \in A_i) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad x \in A_i, \\ 0, & \text{jeśli} \quad x \notin A_i, \end{cases}$$

gdzie $W(\ )$ oznacza wartość logiczną zdania.

1. Zauważ, że

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - w_i(x)) = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} w_{i_1}(x) \ldots w_{i_k}(x).$$

2. Sprawdź równość

$$w_{i_1}(x)\ldots w_{i_k}(x) = W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

3. Wykaż, że dla każdego $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} W(x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = 1.$$

4. Dane są zbiory skończone $B \subset A$. Zauważ, że

$$\sum_{x \in A} W(x \in B) = |B|,$$

gdzie $|B|$ oznacza liczbę elementów (moc) zbioru B.

5. Udowodnij wzór

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

4 V *Bukiet 12*

1. Na płaszczyźnie dane jest koło K o środku S i promieniu R. Zauważ, że:

a) jeśli punkt M leży w kole K, to koło o środku M i promieniu a jest zawarte w kole o środku S i promieniu $R + a$;

b) jeśli punkt M nie leży w kole K, to koło o środku M i promieniu $a < R$ nie ma punktów wspólnych z kołem o środku S i promieniu $R - a$.

2. Rozważmy prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie. Symbolem $K(r)$ oznaczamy koło o środku $(0, 0)$ i promieniu r. Kwadratem jednostkowym o środku (x, y) nazywamy kwadrat o wierzchołkach $(x \pm \frac{1}{2}, y \pm \frac{1}{2})$. Punkt, którego obie współrzędne są całkowite, nazywamy punktem kratowym.

a) Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach leżących w kole $K(R)$ są zawarte w kole $K(R + \frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Uzasadnij, że kwadraty jednostkowe o środkach będących punktami kratowymi leżącymi w kole $K(R)$ pokrywają w całości koło $K(R - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

3. Wyprowadź oszacowanie (z góry i z dołu) liczby punktów kratowych leżących w kole $K(R)$.

4. Oznaczmy przez L_n liczbę par liczb całkowitych (x, y) spełniających nierówność $x^2 + y^2 \leqslant n$. Oszacuj L_n i oblicz

$$\lim_{n \to \infty} \frac{L_n}{n}.$$

17 V *Bukiet 13*

1. a) Dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ rozważmy ciągi

$$(x_n^{(k)}) = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots)$$

o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$. Czy istnieje ciąg

$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, którego k-ty wyraz jest różny od k-tego wyrazu ciągu $(x_n^{(k)})$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$?

b) Czy wszystkie ciągi o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$ można ustawić w ciąg (czyli ponumerować liczbami naturalnymi)?

c) Czy wszystkie liczby rzeczywiste można ustawić w ciąg?

2. Dany jest dowolny zbiór A.

a) Załóżmy, że dla każdego $x \in A$ została określona funkcja $f_x\colon A \to \{0, 1\}$. Czy istnieje funkcja $g\colon A \to \{0, 1\}$ taka, że $g(x) \neq f_x(x)$ dla każdego $x \in A$?

b) Oznaczmy przez $\{0, 1\}^A$ zbiór wszystkich funkcji z A do $\{0, 1\}$. Czy istnieje funkcja $F\colon A \to \{0, 1\}^A$, której zbiorem wartości jest cały zbiór $\{0, 1\}^A$?

c) Symbolem 2^A oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A. Czy istnieje funkcja $f\colon A \to 2^A$, której zbiorem wartości jest 2^A?

7 VI *Bukiet 14*

Dane są dwie różne liczby dodatnie a i b. Na półprostej o początku O obierzmy punkty A i B w ten sposób, że $|OA| = a$ i $|OB| = b$. Rozważmy okrąg, którego średnicą jest odcinek AB. Ze środka S odcinka AB poprowadźmy prostą prostopadłą do AB, która przetnie okrąg w dwóch punktach. Jeden z nich oznaczmy przez Q. Z punktu O poprowadźmy styczną do okręgu, punkt styczności oznaczmy przez G. Rzut prostopadły punktu G na odcinek AB oznaczmy przez H.

1. Mając dane liczby a i b, oblicz:

a) promień okręgu,

b) $|OS|$,

c) $|OQ|$,

d) $|OG|$,

e) $|OH|$.

2. Przekonaj się, że

$$|OH| < |OG| < |OS| < |OQ|$$

i wstaw do tej nierówności obliczone wartości.

Wskazówki do zadań

Bukiet 1

1. a) Przez co należy pomnożyć stronami nierówność $x \geqslant 4$, żeby otrzymać nierówność, w której występują x^4 i x^3?

b) Wykorzystaj nierówności z punktu a).

c) Jakie nierówności podobne do tych z punktu a) będą tu potrzebne?

2, 3. Wypisz najpierw nierówności takie jak w zadaniu 1a).

Bukiet 2

1. b), c) Wszystko na jedną kreskę ułamkową i skróć powtarzające się czynniki.

2. a), b) Przyjrzyj się czynnikom występującym w kolejnych mianownikach i licznikach.

c) Wypisz kilka pierwszych czynników i zauważ ogólną prawidłowość.

3. Przedstaw czynnik w postaci ułamka. Mianownik tego ułamka można rozłożyć na dwa czynniki.

Bukiet 3

1. Zamieniaj każde $\sin^2 x$ na $1 - \cos^2 x$.

2. a) Mając dane P_0 i P_1, oblicz P_2. Mając P_1 i P_2, oblicz P_3, itd.

b) Zakładając, że wielomiany P_{n-1} i P_n spełniają warunek ($\star$), pokaż, że wielomian P_{n+1} też spełnia ten warunek. Analogicznie dla Q_n.

c) Prosta indukcja. Przy badaniu parzystości, w kroku indukcyjnym rozważ oddzielnie przypadki n parzystego i nieparzystego.

Bukiet 4

1. a) Spośród ilu elementów wybieramy a_2?

b) Spośród ilu elementów wybieramy a_3?

c) Na ile sposobów możemy wybrać a_1? Następnie wykorzystaj punkty b) i c).

d) Na ile sposobów możemy wybrać a_4, gdy dane są a_1, a_2 i a_3? I tak dalej, aż do a_k.

e) To jest szczególny przypadek punktu d).

2. a) Na ile sposobów możemy wszystkie elementy podzbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ustawić w ciąg?

b) Wykorzystaj zadania 1d) i 2a).

Bukiet 5

1. Przekształć dane wyrażenie lub zbadaj przebieg zmienności tej funkcji.

2. Zapisz daną równość jako wzór np. na $\arcsin x$ i skorzystaj z definicji. Drugi sposób: jak sprawdzić, że funkcja jest stała?

3. Skorzystaj z zadań 1 i 2.

Bukiet 6

1. Określ najpierw k.

2. Wykorzystaj przedstawienia z zadania 1.

3. Jakimi liczbami są części wolne od p?

4. Zwróć uwagę na części wolne od p wybranych liczb.

5. Ile najwięcej można wybrać liczb o różnych częściach wolnych od p?

Bukiet 7

1. Przenieś wszystko na prawą stronę i spróbuj coś wyłączyć.

2. W kroku indukcyjnym rozważ $n + 1$ liczb, których iloczyn jest równy 1, skorzystaj z założenia indukcyjnego i zastanów się, jak skorzystać z zadania 1.

3. Przekształć tę nierówność tak, aby po prawej stronie było samo n.

Bukiet 8

1. a), e) Rozważ cztery przypadki w zależności od znaków $|x|$ i $|y|$.

c) Rozważ cztery przypadki w zależności od znaków $|x + y|$ i $|x - y|$.

2. a) Jeśli $|x| \leqslant r$, to $x^2 \leqslant r|x|$.

e) Skorzystaj z nierówności $|xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$.

3. Skorzystaj z nierówności $|r + s| \leqslant |r| + |s|$.

4. a) Zauważ, że $|a|, |b| \leqslant M$.

Bukiet 9

1. Znajdź obraz punktu $(x_0+x, f(x_0+x))$ w symetrii środkowej względem punktu (x_0, y_0).

2. Znajdź obraz punktu $(x_0 + x, f(x_0 + x))$ w symetrii osiowej względem prostej $x = x_0$.

3. Dwa (różne) punkty są symetryczne względem prostej, jeśli odcinek łączący te punkty jest do niej prostopadły, a środek tego odcinka leży na danej prostej.

Bukiet 10

1. Najpierw wymnóż zewnętrzne nawiasy.

2. Skorzystaj z zadania 1.

3. Przekształć daną równość.

Bukiet 11

2. Kiedy $w_{i_1}(x) \ldots w_{i_k}(x) = 1$?

3. Jaką wartość przyjmuje wyrażenie po lewej stronie równania z zadania 1 dla $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$?

4. Które składniki tej sumy są równe 1, a które 0?

5. Wystarczy skorzystać z zadań 3 i 4.

Bukiet 12

1. Zależności występujące w tym zadaniu wyraź za pomocą odległości odpowiednich punktów od środków kół.

3. Co, na mocy zadania 2, można powiedzieć o polu figury złożonej z kwadratów jednostkowych o środkach będących punktami kratowymi leżącymi w kole $K(R)$?

4. Skorzystaj z zadania 3.

Bukiet 13

1. a) Ciąg (x_n) ma spełniać warunek $x_k \neq x_k^{(k)}$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$

b) Przypuśćmy, że można i skorzystajmy z punktu a).

c) Zwróć uwagę na liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 1)$, w których rozwinięciach dziesiętnych występują jedynie cyfry 0 i 1.

2. a) Czemu powinno być równe $g(x)$ dla danego $x \in A$?

b) Dla każdego $x \in A$ przyjmij $f_x = F(x)$ i skorzystaj z punktu a).

Bukiet 14

1. c), d) Twierdzenie Pitagorasa, **e)** podobieństwo trójkątów.

2. Każda z tych nierówności dotyczy boków pewnego trójkąta prostokątnego.