

INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE 2003/2004

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły podstawowej

Zestaw I (5 IX)

Zadanie 1. Znajdź 5 kolejnych liczb naturalnych, których suma wynosi 500.

Zadanie 2. Jaką cyfrę dziesiątek powinna mieć liczba sześciocyfrowa postaci 2222_2, aby była podzielna przez 12?

Zadanie 3. Jaką liczbę należy dodać do licznika i do mianownika ułamka $\frac{5}{23}$, aby otrzymać ułamek równy $\frac{5}{7}$?

Zadanie 4. Pierwsza mrówka pokonuje odległość 1 metra w ciągu 2 minut, druga mrówka odległość 2 metrów w ciągu 3 minut, a trzecia mrówka odległość 3 metrów w ciągu 4 minut. Która mrówka porusza się najszybciej, a która najwolniej?

Zadanie 5. W trójkącie równoramiennym ABC kąty przy wierzchołkach A i B są różne. Jaką miarę może mieć kąt przy wierzchołku B , jeśli wiadomo, że kąt przy wierzchołku A ma miarę 30° ?

Zestaw II (19 IX)

Zadanie 1. Sprawdź równość

$$135 + 357 + 579 + 791 + 913 = 975 + 753 + 531 + 319 + 197.$$

Zadanie 2. Znajdź trzy liczby naturalne, których iloczyn wynosi 960, wiedząc, że największa z tych liczb jest o 10 większa od najmniejszej z nich.

Zadanie 3. Znajdź liczbę A , dla której

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{A}}} = \frac{16}{37}.$$

Zadanie 4. $2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5 = 2^{\text{ile?}}$

Zadanie 5. Co możemy powiedzieć o czworokącie $ABCD$, jeśli wiadomo, że

$$P_{ABC} = P_{ABD}?$$

Zestaw III (10 X)

Zadanie 1. Napisz ułamek równy $\frac{3}{13}$, w którym suma licznika i mianownika wynosi 2000.

Zadanie 2. Znajdź liczbę trzycyfrową o tej własności, że jeśli z prawej strony dopiszemy cyfrę 8, to otrzymamy liczbę trzy razy większą, niż gdybyśmy z lewej strony dopisali cyfrę 2.

Zadanie 3. Rycerz zawsze mówi prawdę, łotr zawsze kłamie.

A mówi: „*B* jest łotrem.”

Co odpowie *B* na pytanie: „Czy *A* jest łotrem?”

Zadanie 4. Oblicz iloczyn

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4.$$

Zadanie 5. Na płaszczyźnie dana jest prosta *k*. Odległość punktu *A* od prostej *k* wynosi 5, a odległość punktu *B* od prostej *k* wynosi 3. Jaka może być odległość środka odcinka *AB* od prostej *k*?

Zestaw IV (31 X)

Zadanie 1. Przedstaw liczbę 525 w postaci iloczynu dwóch liczb, których największy wspólny dzielnik wynosi 5. Znajdź wszystkie możliwości.

Zadanie 2. Bolek i Lolek odrabiają lekcje z matematyki. Do domu pani zadała kilka prostych zadań. Bolek rozwiązuje każde zadanie w ciągu 7 minut, a Lolek w ciągu 4 minut. Gdy Lolek rozwiąże już wszystkie zadania, to Bolkowi zostaną jeszcze całe trzy zadania. Ile zadań mają rozwiązać Bolek i Lolek?

Zadanie 3. W polach kwadratowej tablicy 3×3 ustaw liczby 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 i 33 (po jednej liczbie w każdym polu) w ten sposób, by w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie były liczby o trzech różnych cyfrach dziesiątek i trzech różnych cyfrach jedności.

Zadanie 4. W trójkącie *ABC* dany jest taki punkt *O*, że odcinki *OA*, *OB* i *OC* są równe oraz

$$|\angle AOB| = 100^\circ, \quad |\angle BOC| = 120^\circ, \quad |\angle COA| = 140^\circ.$$

Znajdź miary kątów trójkąta *ABC*.

Zadanie 5. Na ile części zostanie podzielona płaszczyzna przez:

a) cztery proste,

b) pięć prostych,

z których żadne dwie nie są równoległe, a żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie?

Zestaw V (21 XI)

Zadanie 1. Znajdź cyfry *A* i *B* różne od 0, dla których suma cyfr liczby *AAB* wynosi

BA.

Zadanie 2. Zamiast symboli \bigcirc , \triangle i \square wstaw liczby tak, aby były spełnione warunki:

$$\bigcirc + \triangle = 990, \quad \triangle + \square = 1000, \quad \square + \bigcirc = 1010.$$

Zadanie 3. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 100 i niepodzielnych przez 2 ani przez 5?

Zadanie 4. Znajdź pole prostokąta zbudowanego z 5 kwadratów, którego obwód wynosi 24.

Zadanie 5. W pewnym trójkącie wszystkie kąty są większe od 45° . Czy ten trójkąt może być:

- a) prostokątny,
- b) rozwartokątny?

Zestaw VI (5 XII)

Zadanie 1. Jakie cyfry jedności może mieć:

- a) kwadrat liczby naturalnej,
- b) czwarta potęga liczby naturalnej?

Zadanie 2. W woreczku jest 12 kulek, w tym 3 niebieskie, 4 białe i 5 czerwonych. Ile kulek trzeba wyjąć, by (nie widząc ich kolorów) mieć pewność, że wśród wybranych kulek są co najmniej 3 kulki jednego koloru?

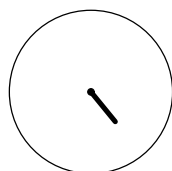
Zadanie 3. Rycerz zawsze mówi prawdę, łotr zawsze kłamie.

A mówi: „B i C są obaj rycerzami.”

B mówi: „Jeden spośród A i C jest rycerzem, a drugi łotrem.”

Kim są A, B i C?

Zadanie 4. Zegar został powieszony krzywo, może nawet „do góry nogami”, a jego tarcza została zamalowana. Wiadomo, że jest po godzinie 12⁰⁰, a przed godziną 13⁰⁰. Na rysunku zaznaczono położenie wskazówki godzinowej. Gdzie nie może znajdować się wskazówka minutowa?



Zadanie 5. Ułóż prostokąt z dziewięciu kwadratów o bokach:

1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18.

Zestaw VII (9 I)

Zadanie 1. Wypisz wszystkie liczby naturalne mniejsze od 25, które są nieparzyste i niepodzielne przez 3. Zauważ, że wszystkie wypisane liczby są liczbami pierwszymi.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe podzielne przez 15, które mają takie cztery różne cyfry nieparzyste, że suma cyfr tysięcy i jedności jest równa sumie cyfr setek i dziesiątek.

Zadanie 3. Na podwórku siedmioro dzieci rzuca się śnieżkami. Każdy przygotował tę samą liczbę śnieżek i każdy w każdego rzucił jedną śnieżkę. Wiadomo, że dzieciom została $\frac{1}{3}$ przygotowanych śnieżek. Ile śnieżek miały dzieci na początku?

Zadanie 4. Jak zmieni się pole prostokąta, gdy jeden jego bok zwiększymy, a drugi zmniejszymy o połowę.

Zadanie 5. Na ile części mogą podzielić płaszczyznę okrąg i dwie proste?

Zestaw VIII (30 I)

Zadanie 1. Oblicz iloraz

$$\underbrace{100 \dots 01}_{20} : 11.$$

Zadanie 2. Znajdź najmniejsze liczby naturalne $m, n > 0$ spełniające warunek

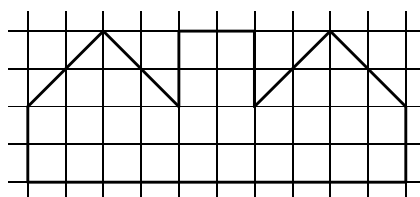
$$m^2 = 3 \cdot n^3.$$

Zadanie 3. Na ile sposobów można wykreślić trzy spośród cyfr:

1, 4, 2, 5, 3, 6, 9, 7, 8,

tak, aby pozostałe cyfry były ustawione w kolejności rosnącej?

Zadanie 4. Podziel poniższą figurę na możliwie najmniejszą liczbę części, z których można złożyć kwadrat.



Zadanie 5. Ułóż z zapalek trzy wielokąty o różnych obwodach i polu równym 6. (Przyjmujemy, że pole kwadratu o boku 1 zapalki jest równe 1.)

Zestaw IX (13 II)

Zadanie 1. Czy 1010101 jest liczbą pierwszą?

Zadanie 2. Suma stu składników, z których każdy jest równy 100, 101 lub 102, wynosi 10120. Ile razy w tej sumie występuje 100, jeśli wiadomo, że 101 występuje dokładnie dwa razy częściej niż 102?

Zadanie 3. Oblicz iloczyn

$$\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{9 \cdot 10}{8 \cdot 11} \cdot \frac{10 \cdot 11}{9 \cdot 12}.$$

Zadanie 4. Rycerz zawsze mówi prawdę, łotr zawsze kłamie. Każdy z panów A , B , C jest rycerzem lub łotrem.

A mówi: „Wszyscy jesteście łotrami.”

B mówi: „Wszyscy jesteście rycerzami.”

Kim jest C ?

Zadanie 5. Z 24 zapalek ułóż prostokąt:

- a) o najmniejszym polu,
- b) o największym polu.

Zestaw X (15 III)

Zadanie 1. Znajdź trzy różne liczby naturalne, których suma wynosi 13, a iloczyn jest możliwie największy.

Zadanie 2. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez:

- a) 5, 6 i 7,
- b) 5, 6, 7 i 8,
- c) 5, 6, 7 i 9?

Zadanie 3. Pan A ma wykonać pewną pracę. Jeśli pan A weźmie do pomocy pana B , to wykonają tę pracę w ciągu 4 godzin, jeśli weźmie do pomocy pana C , to wykonają tę pracę w ciągu 3 godzin, a jeśli weźmie do pomocy obu panów B i C , to wykonają tę pracę w ciągu 2 godzin. W jakim czasie pan A wykona tę pracę samodzielnie?

Zadanie 4. Odgadnij regułę, według której wpisano liczby w pola tablicy. Wpisz odpo-

wiednią liczbę w puste pole.

4	10	22
12		30
28	34	46

Zadanie 5. Na płaszczyźnie dany jest punkt K oraz dwie proste a i b . Na prostej a znajdź taki punkt L , że prosta b dzieli odcinek KL na połowy.

Zestaw XI (29 III)

Zadanie 1. Uzupełnij puste miejsca cyframi tak, aby zachodziła równość

$$\square\square \cdot \square + \square\square 7 = 876.$$

Zadanie 2. Przedstaw liczbę 300 w postaci sumy pięciu liczb naturalnych, z których druga jest 2 razy większa od pierwszej, trzecia 3 razy większa od pierwszej, czwarta 4 razy większa od pierwszej, a piąta 5 razy większa od pierwszej.

Zadanie 3. Napisz największą liczbę naturalną, której wszystkie cyfry są różne.

Zadanie 4. W pewnym trójkącie długość podstawy i wysokość są liczbami całkowitymi, a pole wynosi 6. Ile może wynosić długość podstawy tego trójkąta?

Zadanie 5. Ile osi symetrii może mieć sześciokąt?

Zestaw XII (26 IV)

Zadanie 1. Przedstaw liczbę 10608 w postaci iloczynu dwóch liczb trzycyfrowych.

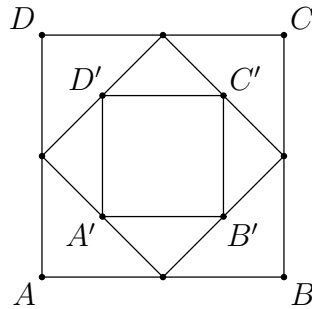
Zadanie 2. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną większą od 0, która dzieli się przez 15, 21 i 35.

Zadanie 3. Zamiast symboli Δ i ∇ wstaw cyfry tak, aby był spełniony warunek

$$\begin{array}{r} \Delta \nabla \\ \times \Delta \Delta \\ \hline \nabla \Delta \Delta \nabla \end{array}$$

Zadanie 4. W pewnym trójkącie kąt przy wierzchołku B jest o 40° większy od kąta przy wierzchołku A , a kąt przy wierzchołku C jest o 80° większy od kąta przy wierzchołku A . Znajdź miary kątów tego trójkąta.

Zadanie 5. W kwadracie $ABCD$ połączono środki boków i otrzymano kwadrat. W tym kwadracie znów połączono środki boków i otrzymano kwadrat $A'B'C'D'$. Znajdź pole kwadratu $A'B'C'D'$, jeśli pole kwadratu $ABCD$ wynosi 4.



Zestaw XIII (10 V)

Zadanie 1. Znajdź liczbę dwucyfrową AB i liczbę trzycyfrową CDE o tej własności, że

$$AB + CDE = 200 \quad \text{i} \quad BA + EDC = 434.$$

Zadanie 2. Jaką cyfrę jedności może mieć suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych?

Zadanie 3. Sprawdź, że iloczyn

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10}$$

jest mniejszy od $\frac{1}{4}$.

Zadanie 4. Hania ma przekazać telefonicznie pewną ważną wiadomość Gosi, Filipowi, Eli i Darkowi. Hania zna tylko numery telefonów Gosi i Filipa. Numer telefonu Eli zna tylko Gosia, a numer telefonu Darka zna tylko Filip. W jakiej kolejności Hania może zadzwonić do swych znajomych? Znajdź wszystkie możliwości.

Zadanie 5. Ułóż z 40 zapalek prostokąt o możliwie największym polu.

Zestaw XIV (24 V)

Zadanie 1. Do jakiej liczby należy dodać sumę jej cyfr, aby otrzymać 100?

Zadanie 2. Znajdź wszystkie dwucyfrowe liczby pierwsze AB takie, że liczba BA też jest pierwsza.

Zadanie 3. Znajdź liczbę czterocyfrową, która jest 9 razy większa od liczby trzycyfrowej i 11 razy większa od liczby dwucyfrowej.

Zadanie 4. Przedstaw liczbę $\frac{1}{2}$ dwoma różnymi sposobami w postaci sumy odwrotności trzech różnych liczb naturalnych. (Sposoby różniące się kolejnością składników uważamy za jednakowe.)

Zadanie 5. Z 729 sześcianników zbudowano sześcian $9 \times 9 \times 9$. Których sześcianników jest więcej – zewnętrznych, czyli przylegających do ścian zbudowanego sześcianu, czy wewnętrznych, czyli nieprzylegających do ścian sześcianu?

Wskazówki do zadań

Zestaw I

1. Jaka liczba będzie w środku?
2. Liczba jest podzielna przez 12, gdy dzieli się przez 3 i przez 4.
3. Jeśli dodamy tę samą liczbę do licznika i do mianownika, to ich różnica się nie zmienia.
4. Jaką odległość pokona każda z mrówek w ustalonym czasie, na przykład 1 minuty (lub 6 minut)?
5. Rozważ oddzielnie przypadki, gdy równe są kąty przy wierzchołkach A i C oraz gdy równe są kąty przy wierzchołkach B i C .

Zestaw II

1. Przyjrzyj się oddzielnie cyfrom: jedności, dziesiątek, setek.
2. Czy najmniejsza z tych liczb może być równa 10 lub więcej?
3. Ułamek $\frac{16}{37}$ przedstaw w postaci $\frac{1}{\cos}$.
4. Sumę po lewej stronie przedstaw w postaci iloczynu.
5. Co możemy powiedzieć o wysokościach tych trójkątów?

Zestaw III

1. Przez jaką liczbę należy pomnożyć licznik i mianownik, aby otrzymać ułamek o sumie 2000?
2. Oznacz cyfry szukanej liczby przez A , B , C i zapisz warunek zadania w postaci mnożenia pisemnego.
3. Rozważ dwa przypadki: 1) A jest rycerzem, 2) A jest łotrem.
4. Wszystko na jedną kreskę ułamkową.
5. Punkty A i B mogą leżeć po tej samej stronie lub po różnych stronach prostej k .

Zestaw IV

1. Każdy z czynników powinien być podzielny przez 5.
2. Ile minut dłużej (od Lolka) będzie Bolek rozwiązywał wszystkie zadania? Ile minut dłużej Bolek rozwiązuje jedno zadanie?
3. Liczby o tej samej cyfrze dziesiątek powinny stać w różnych wierszach i w różnych kolumnach. Podobnie liczby o tej samej cyfrze jedności.
4. Trójkąty ABO , BCO i CAO są równoramienne.

Zestaw V

1. Jaką cyfrę dziesiątek może mieć suma trzech cyfr?

2. Patrząc na pierwsze dwie równości odgadnij, o ile większy jest \square od \bigcirc . Patrząc na drugą i trzecią równość odgadnij, o ile większe jest \bigcirc od \triangle .
3. Jakie mogą być cyfry jedności tych liczb?
4. Znajdź najpierw długość boku pojedynczego kwadratu.
5. Sprawdź sumę kątów tego trójkąta.

Zestaw VI

1. Czwartą potęgę danej liczby otrzymamy, jeśli jej kwadrat podniesiemy do kwadratu.
2. Jaka może być największa liczba kulek, wśród których nie będzie trzech jednego koloru?
3. Co by było, gdyby A był rycerzem? Następnie to samo pytanie dla B .
4. Jak względem wskazówki godzinowej przesuwa się wskazówka minutowa od 12^{00} do 13^{00} ?
5. Najpierw „obuduj” kwadrat o boku 1 kwadratami o bokach 7, 8, 9 i 10.

Zestaw VII

2. Liczba jest podzielna przez 15, gdy jest podzielna przez 3 i przez 5.
3. Ile śnieżek rzuciło każde z dzieci?
4. Przez jaką liczbę należy pomnożyć pole prostokąta?
5. Najpierw narysuj okrąg, następnie rozważ możliwe położenia pierwszej prostej, a potem uwzględnij drugą prostą.

Zestaw VIII

1. Wykonaj dzielenie pisemne. Drugi sposób: przedstaw dzielną w postaci sumy takich dwóch liczb, które łatwo podzielić przez 11.
2. Co możemy powiedzieć o liczbie m ? Co wówczas będziemy mogli powiedzieć o liczbie n ?
3. Przyjrzyj się parom sąsiednich liczb o „złej” kolejności.
5. Najpierw ułóż prostokąty.

Zestaw IX

1. Przyjrzyj się uważnie tej liczbie i zastanów się, czy można ją przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych większych od 1.
2. Suma stu składników równych 100 wynosi 10000.
3. Zauważ, w jaki sposób można poskracać czynniki z licznika i z mianownika.
4. Czy A może być rycerzem?

Zestaw X

1. Zbadaj wszystkie możliwości, gdy najmniejszą z tych liczb jest: 1, 2, 3.

2. Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotność danych liczb.
3. Jaka część pracy wykonają ci panowie w ciągu 1 godziny?
4. Jakie są zależności między liczbami stojącymi w jednym wierszu? Jakie są zależności w jednej kolumnie?
5. Gdzie powinien być punkt L , jeśli środek odcinka KL ma leżeć na prostej b ?

Zestaw XI

1. Jaka może być największa wartość iloczynu liczby dwucyfrowej i liczby jednocyfrowej? Następnie zwróć uwagę na cyfry jedności.
2. Ile razy większa od pierwszej liczby powinna być cała suma?
3. Ile cyfr może mieć ta liczba?
4. Ile wynosi iloczyn długości podstawy i wysokości?

Zestaw XII

1. Liczba 10608 jest trochę większa od $10000 = 100 \cdot 100$.
2. Rozłóż dane liczby na czynniki pierwsze.
3. Zaczynij od cyfr jedności.
4. Pamiętaj, ile wynosi suma kątów trójkąta.
5. Wykonaj rysunek „na kratkach”.

Zestaw XIII

1. Najpierw znajdź C , a następnie A .
2. Jakie cyfry jedności mogą mieć dwie kolejne liczby naturalne?
3. Skróć czynniki 3 i 5.
5. Z ilu zapalek mogą być ułożone boki tego prostokąta?

Zestaw XIV

1. Ile może wynosić suma cyfr szukanej liczby?
2. Jakie cyfry jedności mają dwucyfrowe liczby pierwsze?
3. Przez jakie liczby jest podzielna szukana liczba czterocyfrowa?
4. Zaczynij od najmniejszej z szukanych trzech liczb naturalnych.
5. Jaka bryłę tworzą sześcianiki wewnętrzne?