

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY PODSTAWOWEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

12 IX

rok 2003/2004

Bukiet 1

O pewnych liczbach A , B i C wiadomo, że:

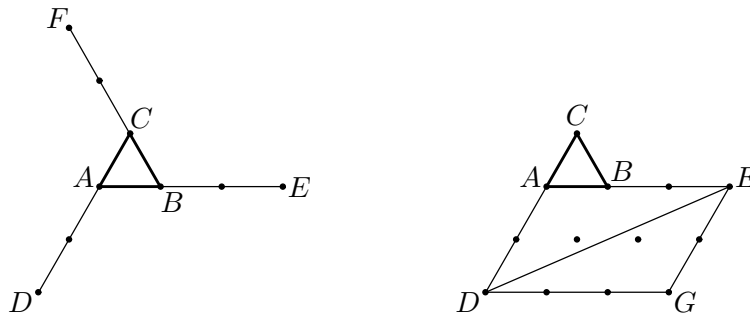
$$A + B = 32, \quad B + C = 40, \quad C + A = 26.$$

1. Ile wynosi $A + B + B + C + C + A$?
2. Czemu jest równe $A + B + C$?
3. Znajdź liczby A , B i C .

3 X

Bukiet 2

Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Na przedłużeniach boków CA , AB , BC obrano odpowiednio punkty D , E , F w ten sposób, że każdy z odcinków AD , BE i CF jest 2 razy dłuższy od boku trójkąta (rysunek po lewej).

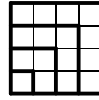


1. Poprowadźmy przez punkt D prostą równoległą do boku AB , przez punkt E prostą równoległą do boku AC i rozważmy równoległobok $ADGE$ (rysunek po prawej). Ile razy większe od pola trójkąta ABC jest pole:
 - a) równoległoboku $ADGE$,
 - b) trójkąta ADE ?
2. Jakim trójkątem jest trójkąt DEF ? Ile razy jego pole jest większe od pola trójkąta ABC ?
3. Rozwiąż zadania 1 i 2 w przypadku, gdy odcinki AD , BE i CF są 5 razy dłuższe od boku trójkąta ABC .

24 X

Bukiet 3

1. Patrząc na liczby odpowiednich kwadracików, możemy odczytać następujące równości:



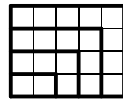
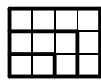
$$1+3+5=3^2, 1+3+5+7=4^2.$$

Wykonaj rysunek odpowiadający sumie

$$1 + 3 + 5 + \dots + 17 + 19.$$

Ile wynosi ta suma?

2. Z poniższych rysunków możemy odczytać równości:



$$2+4+6=3 \cdot 4, 2+4+6+8=4 \cdot 5.$$

Wykonaj rysunek odpowiadający sumie

$$2 + 4 + 6 + \dots + 18 + 20.$$

Ile wynosi ta suma?

3. Oblicz sumę

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 18 + 19 + 20.$$

14 XI

Bukiet 4

1. Podziel trójkąt o kątach 44° , 56° i 80° na dwa trójkąty prostokątne. Znajdź kąty otrzymanych trójkątów. Rozważ wszystkie możliwości.
2. Podziel trójkąt prostokątny o kątach ostrych 24° i 66° na dwa trójkąty równoramienne. Znajdź kąty tych trójkątów.
3. Podziel trójkąt o kątach 26° , 54° i 100° na cztery trójkąty równoramienne. Znajdź kąty otrzymanych trójkątów.

28 XI

Bukiet 5

Dwa pojazdy, szybszy i wolniejszy, poruszające się ze stałymi prędkościami, wyruszyły z punktu A do punktu B . Szybszy pojazd dojechał do B , zawrócił w kierunku A , i w odległości 1 km od B minął wolniejszy pojazd. Wolniejszy pojazd dojechał do B i zawrócił w kierunku A . Szybszy pojazd dojechał do A , zawrócił w kierunku B , i w odległości 5 km od B ponownie minął wolniejszy pojazd.

1. Zauważ, że oba pojazdy do momentu pierwszego spotkania przebyły w sumie odległość dwa razy większą od odległości między A i B . Zauważ również, że tę samą odległość pojazdy przebyły od pierwszego do drugiego spotkania.
2. Jaką odległość przebył wolniejszy pojazd do momentu pierwszego spotkania? Jaka jest odległość między A i B ?
3. Jaki procent prędkości szybszego pojazdu stanowi prędkość wolniejszego pojazdu?

12 XII

Bukiet 6

1. Zauważ, że jeżeli liczba czterocyfrowa $ABCD$ jest podzielna przez liczbę AB , to liczba CD jest podzielna przez liczbę AB .
2. Załóżmy, że $CD = K \cdot AB$, gdzie AB i CD są liczbami dwucyfrowymi, a K jest liczbą jednocyfrową. Wykonaj dzielenie

$$ABCD : AB.$$

3. Znajdź liczbę czterocyfrową $ABCD$ spełniającą warunek

$$ABCD = 2 \cdot AB \cdot CD.$$

16 I

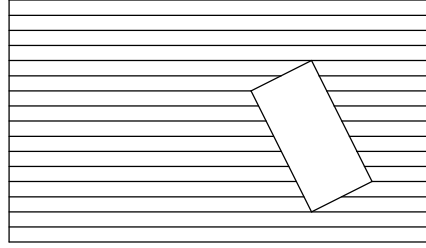
Bukiet 7

1. Czy każde trzy wierzchołki pięciokąta foremnego są wierzchołkami trójkąta równoramiennego?
2. Wskaż trzy wierzchołki sześciokąta foremnego, które nie są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.
3. Czy istnieje na płaszczyźnie 6 punktów, z których każde trzy są wierzchołkami trójkąta równoramiennego?

6 II

Bukiet 8

1. Narysuj prostokąt i prostą dzielącą go na dwie części o równych polach. Czy są jeszcze inne proste o tej własności?
2. Wyjaśnij, dlaczego dowolna prosta przechodząca przez środek prostokąta dzieli go na dwie części o równych polach.
3. W prostokącie wycięto prostokątny otwór. Poprowadź prostą, która podzieli otrzymaną figurę na dwie części o równych polach.



23 II

Bukiet 9

1. Znajdź wszystkie cyfry X , dla których liczba $(1,X)^2$ jest mniejsza od 2 oraz wszystkie cyfry X , dla których liczba $(1,X)^2$ jest większa od 2. Wskaż cyfrę A o tej własności, że

$$(1,A)^2 < 2 \quad \text{i} \quad (1,A+0,1)^2 > 2.$$

2. Niech A będzie cyfrą z zadania 1. Znajdź cyfrę B , dla której

$$(1,AB)^2 < 2 \quad \text{i} \quad (1,AB+0,01)^2 > 2.$$

Zauważ, że jest tylko jedna taka cyfra.

3. Niech A będzie cyfrą z zadania 1, a B cyfrą z zadania 2. Znajdź cyfrę C taką, że

$$(1,ABC)^2 < 2 \quad \text{i} \quad (1,ABC+0,001)^2 > 2.$$

Spróbuj znaleźć kolejne cyfry.

22 III

Bukiet 10

W woreczku są szklane kulki w dziesięciu kolorach: 1 kulka pierwszego koloru, 2 kulki drugiego koloru, ..., 10 kulek dziesiątego koloru.

1. a) Jaką największą liczbę kulek jednego koloru możemy wyjąć z woreczka?
 b) Ile kulek musimy wyjąć z woreczka, by (nie widząc ich kolorów) mieć pewność, że wyjęte kulki są co najmniej dwóch kolorów?
2. a) Jaka jest największa liczba kulek w czterech kolorach, które możemy wyjąć z woreczka?
 b) Ile kulek musimy wyjąć z woreczka, by mieć pewność, że są one w co najmniej pięciu kolorach?
3. Ile kulek musimy wyjąć z woreczka, by mieć pewność, że wyjęte kulki są w co najmniej siedmiu kolorach?

19 IV

Bukiet 11

Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że:

1. $p + 1$ i $p + 3$,

2. $p + 2$ i $p + 4$,

3. $p + 4$ i $p + 8$

też są liczbami pierwszymi. (Trzy różne zadania.)

4 V

Bukiet 12

1. Zamiast liter X i Y wstaw cyfry tak, aby liczba $13X7Y$ była podzielna przez 9. Uwzględnij wszystkie możliwości.

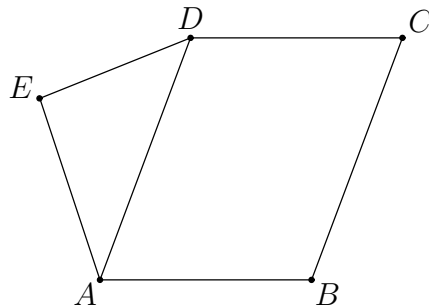
2. Na ile sposobów można wstawić cyfry zamiast liter X i Y tak, aby liczba $13X7Y$ była podzielna przez 6?

3. Zamiast liter X i Y wstaw dwie różne cyfry tak, aby liczba $13X7Y$ była podzielna przez 15, ale nie była podzielna przez 30 ani 45.

17 V

Bukiet 13

Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz trójkąt ADE , jak na rysunku.



1. Zauważ, że pole trójkąta ABD jest równe sumie pól trójkątów ABE i CDE .

2. Wyjaśnij, dlaczego pole trójkąta BCE jest równe sumie pól trójkątów ADE i BCD .

3. Uzasadnij, że pole czworokąta $ABDE$ jest równe polu trójkąta BCE .

7 VI

Bukiet 14

Symbolem $n!$ (czytaj: „silnia”) oznaczamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n , na przykład

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Symbolem $n?$ będziemy w poniższych zadaniach oznaczali sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do n , na przykład

$$4? = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

1. Oblicz $5?$ i $5!$.

2. Oblicz $(3?)!$ i $(4!)?$. Która z tych liczb jest większa?

3. Która z liczb:

$$((2?)!)?, \quad ((2!)?)!$$

jest większa?

Wskazówki do zadań

Bukiet 1

2. Z zadania 1 wiesz, ile wynosi $2 \cdot A + 2 \cdot B + 2 \cdot C$.
3. Co możesz powiedzieć, jeśli wiesz, ile wynosi $A + B + C$ i ile wynosi $A + B$?

Bukiet 2

1. a) Z ilu trójkątów równobocznych (takich jak ABC) składa się równoległobok $ADGE$?
b) Pole trójkąta ADE łatwo obliczyć, znając pole równoległoboku $ADGE$.
2. Zwróć uwagę na trójkąty ADE , BEF i CFD .
3. Podziel równoległobok $ADGE$ na małe równoległoboki. Ile ich będzie?

Bukiet 4

1. Na ile sposobów można poprowadzić wysokość trójkąta?
2. Gdzie można utworzyć dodatkowe kąty 24° i 66° ?
3. Wykorzystaj metodę z zadań 1 i 2.

Bukiet 5

1. Narysuj drogę każdego z pojazdów i zaznacz miejsca spotkań.
2. Jaką odległość przebył wolniejszy pojazd od pierwszego do drugiego spotkania?
3. Jaką odległość przebył szybszy pojazd do momentu pierwszego spotkania?

Bukiet 6

1. Przedstaw liczbę $ABCD$ w postaci sumy dwóch liczb.
2. Czemu jest równe $CD : AB$?
3. Podziel obie strony przez AB .

Bukiet 7

1. Rozważ oddzielnie przypadki, gdy są to trzy kolejne wierzchołki pięciokąta oraz gdy to nie są trzy kolejne wierzchołki.
3. Skorzystaj z zadania 1.

Bukiet 8

2. Jeśli prosta nie zawiera przekątnej danego prostokąta, to obie części podziału są czworokątami. Podziel każdy z tych czworokątów na prostokąt i trójkąt prostokątny.
3. Znajdź prostą, która podzieli każdy z prostokątów na dwie części o równych polach.

Bukiet 9

1. Podstawiaj za X kolejne cyfry. Drugi sposób: zamień ułamek dziesiętny na ułamek zwykły.
Czemu jest równe $1, A + 0,1$?
2. Za A podstaw cyfrę znaną w zadaniu 1, a za B podstawiaj kolejne cyfry.

Bukiet 10

1. b) Jeśli chcemy mieć pewność, że wyjęte kulki są co najmniej dwóch kolorów, to musimy wyjąć więcej od największej liczby kulek jednego koloru.
2. a) Które cztery kolory są najbardziej „liczne”?
b) Jeśli chcemy mieć pewność, że wyjęte kulki są w co najmniej pięciu kolorach, to musimy wyjąć więcej od największej liczby kulek w czterech kolorach.

Bukiet 11

1. Jedna z liczb $p, p + 1$ jest parzysta.
2. Jedna z liczb $p, p + 2, p + 4$ jest podzielna przez 3.
3. Jedna z liczb $p, p + 4, p + 8$ jest podzielna przez 3.

Bukiet 12

1. Skorzystaj z cechy podzielności przez 9.
2. Liczba jest podzielna przez 6, jeśli jest podzielna przez 2 i przez 3.
3. Liczba jest podzielna przez 15, jeśli jest podzielna przez 3 i przez 5. Kiedy liczba jest podzielna przez 30? Kiedy liczba jest podzielna przez 45?

Bukiet 13

1. Trójkąty ABE i CDE mają równe podstawy AB i CD . Zwróć uwagę na ich wysokości.
2. Przyjrzyj się wysokościami trójkątów ADE i BCD , opuszczonym odpowiednio na ich podstawy AD i BC .
3. Tu jest kilka sposobów. Wykorzystaj zadanie 1 lub 2 (lub oba zadania).

Bukiet 14

2. Najpierw oblicz $3!$, a następnie iloczyn wszystkich liczb od 1 do 3!. Podobnie, najpierw oblicz $4!$, a następnie sumę wszystkich liczb od 1 do 4!.
3. Najpierw oblicz $2!$, następnie $(2!)!$, a na końcu $((2!)!)!$. Podobną kolejność zachowaj przy obliczaniu liczby $((2!)!)!$.