Internetowe Kółko Matematyczne 2003/2004

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

Zadania dla gimnazjum *Zestaw I* (12 IX)

Zadanie 1. Znajdź cyfry A, B, C, spełniające równość:

$$\text{a)}\quad AB^A = BCB, \qquad \text{b)}\quad AB^A = CCB.$$

Zadanie 2. Porównaj liczby:

$$((2^2)^2)^2,\ (2^{(2^2)})^2,\ (2^2)^{(2^2)},\ 2^{((2^2)^2)},\ 2^{(2^{(2^2)})}.$$

Zadanie 3. Dla jakich liczb rzeczywistych x zachodzą nierówności

$$x < \frac{1}{x} < -x?$$

Zadanie 4. Wiadomo, że

$$\frac{a}{b+c} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{b}{c+a} = \frac{1}{3}.$$

Oblicz

$$\frac{c}{a+b}.$$

Zadanie 5. Ile razy większy jest promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt?

Zestaw II (3 X)

Zadanie 1. Znajdź cyfrę jedności sumy

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7 + 8^8 + 9^9 + 10^{10}.$$

Zadanie 2. Wyjaśnij, dlaczego, gdy jedna liczba naturalna jest o połowę większa od drugiej, to ich suma jest podzielna przez 5.

Zadanie 3. Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b zachodzi nierówność

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}.$$

Zadanie 4. Ile jest liczb czterocyfrowych o sumie cyfr równej 4?

Zadanie 5. W trójkącie ABC środkowa wychodząca z wierzchołka A jest równa połowie boku BC. Znajdź miarę kąta przy wierzchołku A.

Zestaw III (24 X)

Zadanie 1. Znajdź liczby naturalne M i N większe od 0 i mniejsze od 100, o tej własności, że dana wartość po zmniejszeniu o $M\%$, a następnie zwiększeniu o $N\%$, nie ulegnie zmianie.

Zadanie 2. Z pięciu różnych liczb wymiernych utworzono wszystkie sumy po cztery liczby i otrzymano:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2}.$$

Znajdź pięć liczb o tej własności.

Zadanie 3. Udowodnij nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

Zadanie 4. W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku A jest różny od kąta przy wierzchołku B. Jaką miarę może mieć kąt przy wierzchołku B, jeśli wiadomo, że kąt przy wierzchołku A ma miarę mniejszą od $30°$.

Zadanie 5. Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ obrano dowolny punkt K. Uzasadnij, że

$$P(ABK) + P(CDK) = P(BCK) + P(DAK).$$

Zestaw IV (14 XI)

Zadanie 1. Danych jest pięć kolejnych liczb nieparzystych: $a < b < c < d < e$. Czy $de - ab$ może być równe:

a) 100, **b)** 120, **c)** 180?

Zadanie 2. Uzasadnij, że jeżeli pewna liczba całkowita jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych, to jej dwukrotność też jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Zadanie 3. Udowodnij równości:
a) $\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{27}$,
b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{147}$.

Zadanie 4. Dane są trzy figury: koło, kwadrat i trójkąt równoboczny, z których każda ma obwód równy 1. Która z tych figur ma największe, a która najmniejsze pole?

Zadanie 5. Wyprowadź wzór na wysokość:

a) ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy a i krawędzi bocznej b;
b) czworościanu foremnego o krawędzi a.

Zestaw V (28 XI)

Zadanie 1. Znajdź liczbę dwucyfrową o tej własności, że liczba otrzymana z niej przez dopisanie cyfry 5 z prawej strony jest wielokrotnością liczby otrzymanej z niej przez dopisanie cyfry 1 z lewej strony.

Zadanie 2. Wykaż, że suma kwadratów dowolnych dwóch kolejnych liczb naturalnych daje tę samą resztę przy dzieleniu przez 4.

Zadanie 3. Wśród podanych liczb wskaż liczby wzajemnie przeciwne oraz liczby wzajemnie odwrotne:

$$1+\sqrt{2}, \quad 1-\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}-1, \quad -\sqrt{2}-1.$$

Zadanie 4. W prostokącie o wymiarach 30×40 rozmieszczono w dowolny sposób 101 punktów. Uzasadnij, że wśród danych punktów są takie dwa, których odległość jest nie większa od 5.

Zadanie 5. Znajdź długości ramion i wysokości trapezu, którego podstawy mają długości 1 i $\sqrt{3}$, a kąty przy dłuższej podstawie mają miary 45° i 120°.

Zestaw VI (12 XII)

Zadanie 1. Wskaż trzy liczby naturalne, których suma jest równa ich iloczynowi. Czy jest tylko jedna możliwość?

Zadanie 2. Które liczby naturalne można przedstawić w postaci sumy szóstek i siódemek? (Sumę samych szóstek lub samych siódemek też uważamy za „sumę szóstek i siódemek".)

Zadanie 3. Czy liczbę 1100 można przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb, których największy wspólny dzielnik wynosi 11?

Zadanie 4. Ile jest liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 7?

Zadanie 5. Ściany sześcianu o krawędzi n pomalowano, a następnie podzielono ten sześcian na małe sześciany o krawędzi 1. Określ, ile małych sześcianów ma pomalowane: a) 3 ściany, b) 2 ściany, c) 1 ścianę, d) 0 ścian.

Zestaw VII (16 I)

Zadanie 1. Znajdź takie cyfry A i B, że suma cyfr liczby

$$ABABABABABABABABAB$$

jest równa liczbie AB.

Zadanie 2. Oblicz iloczyn $2^{3^4} \cdot 4^{3^2}$.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r spełniające równanie $p^2 = q^2 + 3r$.

Zadanie 4. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest ostry. Niech D będzie punktem przecięcia symetralnej boku AC z prostą BC, a E punktem przecięcia symetralnej boku BC z prostą AC. Wiadomo, że proste AD i BE są prostopadłe. Znajdź miarę kąta przy wierzchołku C.

Zadanie 5. Wykaż, że dla dowolnego punktu K leżącego na boku AB trójkąta ABC zachodzi równość

$$\frac{P(ACK)}{P(BCK)} = \frac{|AK|}{|BK|}.$$

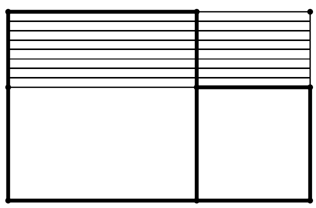
Zestaw VIII (6 II)

Zadanie 1. Ile może wynosić iloczyn cyfr liczby naturalnej, jeśli jest większy od 50 i mniejszy od 60?

Zadanie 2. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to liczba $n \cdot (n+3)$ jest podzielna przez 9 lub nie jest podzielna przez 3.

Zadanie 3. Wiadomo, że $x + y = 1$ i $x^2 + y^2 = 2$. Oblicz $x \cdot y$ i $x^3 + y^3$.

Zadanie 4. Na rysunku dane są dwa kwadraty. Uzasadnij, że zakreskowany prostokąt ma obwód równy obwodowi dużego kwadratu i pole równe różnicy pól obu kwadratów.



Zadanie 5. Na jaką największą liczbę części mogą podzielić płaszczyznę:

a) trzy okręgi, **b)** cztery okręgi?

Zestaw IX (23 II)

Zadanie 1. Oblicz sumę
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

Zadanie 2. Dane są liczby rzeczywiste a, b i c. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^2+y^2 &= a \\ y^2+z^2 &= b \\ z^2+x^2 &= c \end{cases}$$
Dla jakich a, b, c ten układ równań posiada rozwiązanie?

Zadanie 3. Czy istnieje wielokąt, który ma 1000 przekątnych? Jeśli nie, to który wielokąt ma liczbę przekątnych najbliższą 1000?

Zadanie 4. Co można powiedzieć o czworokącie $ABCD$, jeśli wiadomo, że trójkąty ABC, BCD, CDA i DAB mają równe obwody.

Zadanie 5. Wyprowadź wzór na objętość prostopadłościanu w zależności od pól powierzchni P_1, P_2, P_3 trzech jego ścian o wspólnym wierzchołku.

Zestaw X (22 III)

Zadanie 1. Znajdź liczbę dwucyfrową o tej własności, że jeśli między jej cyfry wstawimy cyfrę 0, to otrzymamy liczbę 9 razy większą.

Zadanie 2. Która z liczb jest większa: 10^{20} czy 20^{10}?

Zadanie 3. Znajdź wszystkie trójkąty, których długości boków wyrażają się liczbami całkowitymi, a obwód wynosi 10.

Zadanie 4. Dany jest okrąg o promieniu 1. Niech odcinek AB będzie średnicą tego okręgu, zaś C punktem leżącym na okręgu, różnym od punktu A. Rzut prostopadły punktu C na średnicę AB oznaczmy przez D, a rzut prostopadły punktu D na cięciwę AC oznaczmy przez E. Oblicz długość odcinka AE wiedząc, że $|AC| = a$.

Zadanie 5. Ile jest różnych siatek sześcianu? Siatki uważamy za jednakowe, jeśli można je na siebie nałożyć.

Zestaw XI (19 IV)

Zadanie 1. Czy istnieje liczba dwucyfrowa równa sumie kwadratów swoich cyfr?

Zadanie 2. Jakie wspólne dzielniki mogą mieć liczby n i $n+6$, jeśli n jest liczbą naturalną?

Zadanie 3. Udowodnij nierówność

$$(x+y)(x^4+y^4) \geqslant (x^2+y^2)(x^3+y^3)$$

dla liczb dodatnich x i y.

Zadanie 4. Znajdź liczby całkowite k, l i m, dla których

$$6^k \cdot 10^l \cdot 15^m = 9^{2000}.$$

Zadanie 5. Znajdź kąty trójkąta prostokątnego, jeśli wiadomo, że jeden z nich jest o 20° większy od drugiego.

Zestaw XII (4 V)

Zadanie 1. Ile dzielników naturalnych ma liczba 12^{10}?

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli $a-b=1$, to $2^a-2^b=2^b$ (a i b są liczbami naturalnymi).

Zadanie 3. Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność

$$x^2+xy+y^2 < x^3y^3,$$

to $xy > \sqrt{3}$ lub $-\sqrt{3} < xy < 0$.

Zadanie 4. Rycerz zawsze mówi prawdę, łotr zawsze kłamie.
A mówi: „Wśród B, C i D jest łotr."
B mówi: „Wśród C i D jest łotr."
Kim jest A?

Zadanie 5. Czy siedmiokąt może mieć dwie pary i jedną trójkę boków równoległych?

Zestaw XIII (17 V)

Zadanie 1. Podaj przykład takiej liczby naturalnej, że jeśli jej ostatnią cyfrę przeniesiemy na początek, to otrzymamy liczbę 3 razy większą.

Zadanie 2. Uzasadnij, że jeśli $a+b>0$ i $ab>0$, to $a>0$ i $b>0$, a jeśli $a+b<0$ i $ab>0$, to $a<0$ i $b<0$.

Zadanie 3. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n, która nie jest kwadratem liczby naturalnej i ma tę własność, że pierwszą cyfrą po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{n}$ jest 9.

Zadanie 4. W prostokącie rozmieść trzy punkty tak, aby najmniejsza z odległości między nimi była możliwie największa. Znajdź wszystkie rozmieszczenia spełniające ten warunek.

Zadanie 5. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c wpisano okrąg o promieniu r. Wykaż, że

$$2r(r + c) = ab.$$

Zestaw XIV (7 VI)

Zadanie 1. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 111, której suma cyfr jest równa 111.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{9}{4x}.$$

Zadanie 3. Znajdź wszystkie trójkąty prostokątne, których długości boków wyrażają się liczbami całkowitymi, przy czym jedną z nich jest 12.

Zadanie 4. Która z liczb jest większa – stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym do pola tego trójkąta, czy stosunek pola trójkąta równobocznego do pola koła wpisanego w ten trójkąt?

Zadanie 5. W czworokącie $ABCD$ obie przekątne i bok AB są równej długości. Wyznacz kąt, pod jakim przecinają się przekątne, mając dane miary kątów czworokąta przy wierzchołkach A i B.

Wskazówki do zadań

Zestaw I

1. Liczbę dwucyfrową podniesiono do pewnej potęgi i otrzymano liczbę trzycyfrową. Jaki jest wykładnik tej potęgi?

2. Pamiętaj, że najpierw należy wykonać działanie w wewnętrznym nawiasie.

3. Jakiego znaku jest liczba x?

4. Z układu równań wyznacz dwie niewiadome w zależności od trzeciej.

5. W trójkącie równobocznym dwusieczne kątów pokrywają się z symetralnymi boków i dzielą się w stosunku $2:1$.

Zestaw II

1. Przyjrzyj się cyfrom jedności kolejnych potęg liczby 9 (czyli 9^1, 9^2, 9^3, ...), kolejnych potęg liczby 8, kolejnych potęg liczby 7 i tak dalej.

2. Połowę drugiej liczby oznacz przez n.

3. Podnieś obie strony do kwadratu i przenieś wszystko na jedną stronę.

4. Jakie cyfry może mieć taka liczba? Na ile sposobów można utworzyć liczbę czterocyfrową z danego układu cyfr?

5. Zwróć uwagę na trójkąty równoramienne.

Zestaw III

1. Warunek zadania przekształć do postaci równania z liczbami całkowitymi.

2. Dodaj do siebie wszystkie sumy po cztery liczby.

3. Pomnóż obie strony przez 2, przenieś wszystko na lewą stronę i odpowiednio pogrupuj składniki.

4. Rozważ oddzielnie przypadki: $\angle A = \angle C$ i $\angle B = \angle C$.

5. Przyjrzyj się wysokościom trójkątów poprowadzonym z puntu K.

Zestaw IV

1. Wyraź pozostałe liczby przez c.

2. Trzeba to dopasować do wzorów skróconego mnożenia.

3. Podnieś obie strony do kwadratu. Drugi sposób: spróbuj coś wyłączyć po lewej stronie.

4. Najpierw znajdź promień okręgu oraz boki kwadratu i trójkąta.

5. a) Rozważ trójkąt utworzony przez wysokość ostrosłupa, krawędź boczną oraz część wysokości podstawy. Jaka to jest część wysokości podstawy?

b) Czworościan foremny to ostrosłup trójkątny, którego wszystkie krawędzie są równe.

Zestaw V

1. Zwróć uwagę na ostatnie cyfry. Drugi sposób: oznacz szukaną liczbę przez n i wyraź przez n liczby z treści zadania.

2. Rozważ dwie kolejne liczby naturalne: n i $n+1$.

3. Liczba przeciwna do x to $-x$, a liczba odwrotna do x to $\frac{1}{x}$.

4. Podziel dany prostokąt na mniejsze prostokąty.

5. Wykorzystaj trójkąty prostokątne.

Zestaw VI

1. Łatwo podać przykład. Aby sprawdzić, czy to jest jedyna możliwość, zauważ, że jeśli $x \leqslant y \leqslant z$, to $x+y+z \leqslant 3z$.

2. Sumy szóstek i siódemek ustaw w tabelce.

3. Zwróć uwagę na podzielność przez 11.

4. Policz ilorazy tych liczb przez 7.

Zestaw VII

1. Pamiętaj o tym, że $AB = 10 \cdot A + B$. Drugi sposób: zacznij od tego, co można powiedzieć o sumie cyfr liczby $AB \ldots AB$ i idź dalej tym tropem.

2. Gdy piszemy n^{m^k}, to mamy na myśli $n^{(m^k)}$.

3. Przenieś q^2 na lewą stronę i skorzystaj ze znanego wzoru.

4. Zauważ trójkąty równoramienne.

Zestaw VIII

1. Każdą z liczb większych od 50 i mniejszych od 60 rozłóż na czynniki pierwsze.

2. Rozważ oddzielnie przypadki, gdy n dzieli się przez 3 i gdy n nie dzieli się przez 3.

3. Skorzystaj ze wzorów na $(x+y)^2$ i $(x+y)^3$.

4. Oznacz boki kwadratów przez a i b.

5. Przez ile części podziału trzema okręgami może przechodzić czwarty okrąg?

Zestaw IX

1. Oblicz najpierw tę sumę dla małych n. Ile brakuje do „okrągłej” liczby? Spróbuj to dodać do sumy w przypadku ogólnym.

2. Dodaj równania stronami.

3. Jeśli nie pamiętasz wzoru na liczbę przekątnych n-kąta, to go wyprowadź. Policz, ile przekątnych wychodzi z każdego wierzchołka, i pamiętaj, że każda przekątna wychodzi z dwóch wierzchołków.

4. Najpierw zajmij się długościami boków, a potem długościami przekątnych.

Zestaw X

1. Oznacz cyfry dziesiątek oraz jedności szukanej liczby i napisz równanie.

2. Przedstaw obie liczby jako potęgi o tym samym wykładniku.

3. Jaki może być najdłuższy bok takiego trójkąta?

4. Wykorzystaj podobieństwo trójkątów prostokątnych.

Zestaw XI

1. Napisz równanie, oznaczając np. przez A cyfrę dziesiątek, a przez B cyfrę jedności. Wyrażenia z A przenieś na lewą, a wyrażenia z B na prawą stronę równania.

2. Jeśli dwie liczby dzielą się przez trzecią liczbę, to ich różnica też dzieli się przez tę liczbę.

3. Wymnóż nawiasy, przenieś wszystko na lewą stronę i spróbuj coś wyłączyć.

4. Rozłóż wszystkie liczby na czynniki pierwsze.

5. Są dwa przypadki.

Zestaw XII

1. Rozłóż daną liczbę na czynniki pierwsze i zastanów się, jak mogą wyglądać dzielniki tej liczby.

2. Wyraź a za pomocą b.

3. Od czego jest większa (lub równa) lewa strona danej nierówności?

4. Czy A może być łotrem?

5. Szukany siedmiokąt nie może być wypukły.

Zestaw XIII

1. Zacznij od ostatniej cyfry szukanej liczby, a następnie wyznaczaj jej kolejne cyfry od końca.

2. Co oznacza nierówność $ab > 0$?

3. Napisz nierówności wyrażające warunek zadania.

4. Jeśli podzielimy prostokąt na dwie części, to dwa z rozważanych punktów będą leżały w jednej z tych części. Jaka jest największa możliwa odległość między nimi? Jak należy podzielić dany prostokąt?

5. Jeśli chcesz wyznaczyć r w zależności od a, b i c, to przyjrzyj się uważnie odcinkom, na jakie punkty styczności dzielą boki trójkąta.

Zestaw XIV

2. Dodaj ułamki po lewej stronie lub pomnóż obie strony równania przez iloczyn wszystkich mianowników.

3. Zapisz warunek z twierdzenia Pitagorasa, uwzględnij dwa przypadki. W trudniejszym przypadku przekształć równość tak, aby skorzystać ze wzoru na różnicę kwadratów.

4. W jakim stosunku przecinają się wysokości w trójkącie równobocznym?

5. Wykorzystaj trójkąty równoramienne.