Bukiety matematyczne dla gimnazjum

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

5 IX | rok 2003/2004 | *Bukiet 1*

1. W trójkącie ABC prosta równoległa do boku AB przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Zauważ, że prosta przechodząca przez punkt C i środek boku AB dzieli odcinek DE na połowy.

2. W trapezie $KLMN$ przekątne KM i LN przecinają się w punkcie R. Prosta równoległa do podstaw, przechodząca przez punkt R, przecina ramiona KN i LM odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że $|PR| = |QR|$.

3. Uzasadnij, że w trapezie, który nie jest równoległobokiem, następujące cztery punkty leżą na jednej prostej: środki obu podstaw, punkt przecięcia przekątnych i punkt przecięcia prostych zawierających ramiona. Co można powiedzieć w przypadku równoległoboku?

19 IX *Bukiet 2*

Rozważmy prostokąt $m \times n$, podzielony na kwadraty jednostkowe.

1. Ile wierzchołków kwadratów jednostkowych leży na danej przekątnej prostokąta?

2. Ile boków tych kwadratów przecina przekątna prostokąta?

3. Przez ile kwadratów jednostkowych przechodzi przekątna prostokąta?

10 X *Bukiet 3*

W trójkącie równobocznym ABC o boku długości a obrano punkt wewnętrzny P tak, że

$$|PA| = 3, \quad |PB| = 4, \quad |PC| = 5.$$

1. Na odcinku AP, jak na podstawie, budujemy trójkąt równoboczny APD, leżący na zewnątrz trójkąta APC. Wykaż, że:
a) $|\angle BAD| = |\angle CAP|$;
b) $|BD| = 5$.

2. Niech E będzie rzutem prostopadłym punktu B na prostą AP. Pokaż, że $|\angle BPE| = 30°$.

3. Znajdź a.

31 X *Bukiet 4*

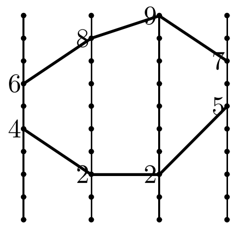
Liczbę naturalną (co najmniej trzycyfrową) nazywamy **wypukłą w dół**, jeśli dla dowolnych jej trzech kolejnych cyfr A, B, C zachodzi nierówność

$$B < \frac{A+C}{2}, \quad \text{czyli} \quad A - B > B - C.$$

Podobnie, liczbę nazywamy **wypukłą w górę**, jeśli jej dowolne trzy kolejne cyfry A, B, C spełniają nierówność

$$B > \frac{A+C}{2}, \quad \text{czyli} \quad A - B < B - C.$$

Łatwo sprawdzić, że liczba 4225 jest wypukła w dół, a liczba 6897 jest wypukła w górę. Wypukłość liczb możemy przedstawić graficznie.



1. Podaj kilka liczb pięciocyfrowych wypukłych w dół lub w górę.

2. Znajdź najmniejszą ośmiocyfrową liczbę naturalną wypukłą w górę.

3. Znajdź największą liczbę naturalną wypukłą w dół.

21 XI *Bukiet 5*

Rozważmy dowolny czworokąt wypukły $ABCD$.

1. Udowodnij, że jeżeli przekątne AC i BD są prostopadłe, to

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2.$$

2. Niech K i L będą dowolnymi punktami na odcinku AC. Wykaż, że jeżeli $|AK|^2 + |CL|^2 = |AL|^2 + |CK|^2$, to $K = L$.

3. Udowodnij, że jeżeli $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$, to przekątne AC i BD są prostopadłe.

5 XII *Bukiet 6*

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1. Na bokach AB, BC, CD, DA tego kwadratu obrano odpowiednio dowolne punkty K, L, M, N. Niech K_1 i K_2 będą odpowiednio obrazami punktu K w symetrii względem prostych BC i DA. Niech K_3 będzie obrazem punktu K_2 w symetrii względem prostej CD. Udowodnij, że:

1. $|KL| + |LM| \geqslant |K_1M|, \quad |MN| + |NK| \geqslant |MK_2|$;

2. $|K_1M| + |MK_2| \geqslant |K_1K_3|$;

3. obwód czworokąta $KLMN$ nie przekracza $2\sqrt{2}$.

9 I *Bukiet 7*

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n:

1. Jeśli liczba $n^2 + n - 1$ jest podzielna przez 5, to liczba

$$(n-2)(n+3)$$

też jest podzielna przez 5.

2. Jeśli liczba $(n-2)(n+3)$ jest podzielna przez 5, to jest podzielna przez 25.

3. Liczba $n^2 + n - 1$ nie jest podzielna przez 25.

30 I *Bukiet 8*

Rozważmy dowolny trójkąt ABC. Niech a, b i c będą odpowiednio długościami boków BC, CA i AB. Niech P będzie polem trójkąta ABC, p – połową jego obwodu, r – promieniem okręgu wpisanego, a r_A, r_B i r_C – promieniami okręgów dopisanych odpowiednio do boków BC, CA i AB. (Okrąg dopisany do boku trójkąta to okrąg styczny do tego boku i przedłużeń dwóch pozostałych boków.)

Udowodnij, że:

1. $P = p \cdot r$;

2. $P = (p-a) \cdot r_A = (p-b) \cdot r_B = (p-c) \cdot r_C$;

3. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_A} + \dfrac{1}{r_B} + \dfrac{1}{r_C}$.

13 II *Bukiet 9*

1. Uzasadnij, że jeśli liczba dwucyfrowa AB jest podzielna przez iloczyn swych cyfr $A \cdot B$, to liczba $A0$ jest podzielna przez B, a B jest podzielne przez A.

2. Wypisz wszystkie wielokrotności liczby A, będące dzielnikami liczby $10 \cdot A$.

3. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez iloczyn swych cyfr.

15 III *Bukiet 10*

Określmy działanie „$\diamond$" w następujący sposób. Jeśli a i b są liczbami rzeczywistymi takimi, że $a \cdot b \neq 1$, to przyjmujemy

$$a \diamond b = \frac{a+b}{1-a\cdot b}.$$

1. Sprawdź, że dla dowolnej liczby a oraz dowolnej liczby b takiej, że $a \cdot b \neq 1$, zachodzą równości:

$$a \diamond 0 = a, \quad a \diamond (-a) = 0, \quad a \diamond b = b \diamond a.$$

2. Jakie warunki powinny spełniać liczby a, b i c, aby miały sens wyrażenia $(a \diamond b) \diamond c$ i $a \diamond (b \diamond c)$. Wykaż, że wówczas zachodzi równość

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c).$$

3. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Korzystając z powyższych własności działania „$\diamond$", rozwiąż równanie

$$x \diamond a = b.$$

29 III *Bukiet 11*

Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wierzchołku C ma miarę $60°$. Punkty K i L są spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A i B. Punkt D jest środkiem boku AB.

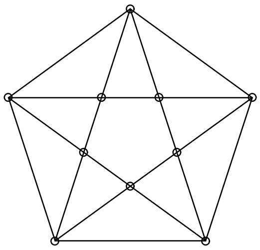
1. Uzasadnij, że punkty K i L leżą na okręgu, którego średnicą jest odcinek AB.

2. Znajdź miarę kąta KDL.

3. Wykaż, że trójkąt DKL jest równoboczny.

26 IV *Bukiet 12*

W pięciokącie foremnym zaznaczono wszystkie wierzchołki oraz punkty przecięcia przekątnych.



1. Na ile sposobów można wybrać pięć spośród zaznaczonych punktów tak, aby do każdej przekątnej należały dokładnie dwa z wybranych punktów?

2. W pięciu z zaznaczonych punktów umieść liczbę n, a w pozostałych pięciu liczbę 1 tak, aby iloczyn liczb na każdej przekątnej pięciokąta był taki sam.

3. Umieść 10 różnych liczb naturalnych w zaznaczonych punktach tak, aby iloczyn liczb na każdej przekątnej pięciokąta był taki sam.

10 V *Bukiet 13*

Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1. Przez k oznaczmy największą liczbę naturalną taką, że $2^k \leqslant n$.

1. Uzasadnij, że

$$\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, n) = 2^k \cdot m,$$

gdzie m jest pewną liczbą nieparzystą.

2. Każdy z ułamków $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$ przedstawiamy w postaci ułamka o mianowniku $2^k \cdot m$. Ile z otrzymanych ułamków będzie miało nieparzyste liczniki?

3. Wykaż, że suma

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

nie jest liczbą całkowitą.

24 V *Bukiet 14*

1. Wykonaj dzielenie

$$\underbrace{99\ldots99}_{2k} : 99.$$

2. Wskaż największą liczbę n-cyfrową podzielną przez 11.

3. Dla jakich n liczba $1\underbrace{00\ldots00}_{n-1}1$ jest podzielna przez 11?

Wskazówki do zadań

Bukiet 1

1. Rozważ proporcje $\frac{|DT|}{|AS|}$ i $\frac{|ET|}{|BS|}$, gdzie S jest środkiem odcinka AB, a T jest punktem przecięcia prostych CS i DE.

2. Udowodnij, że $\frac{|KM|}{|KR|} = \frac{|LN|}{|LR|}$.

3. Zastosuj zadanie 1 do trójkąta utworzonego przez jedną podstawę i proste zawierające ramiona trapezu.

Bukiet 2

1. Rozważ najpierw przypadek, gdy m i n są względnie pierwsze.

2. Znajdź oddzielnie liczby boków poziomych i pionowych.

3. Ile punktów przecięcia, o których mowa w zadaniach 1 i 2, jest na przekątnej?

Bukiet 3

1. a) Które z kątów o wierzchołku A są równe?

b) Trójkąty ACP i ABD.

2. Jakim trójkątem jest trójkąt BPD?

3. Oblicz $|BE|$ i $|PE|$, a następnie wykorzystaj trójkąt ABE.

Bukiet 4

1. Przedstaw graficznie szukane liczby.

2, 3. Zwróć uwagę na różnice między kolejnymi cyframi.

Bukiet 5

1. Wykorzystaj trójkąty prostokątne.

2. Wyraź $|CK|$ i $|CL|$ przez $|AC|$, $|AK|$ i $|AL|$.

3. Niech K i L będą odpowiednio rzutami prostopadłymi punktów B i D na prostą AC.

Bukiet 6

1. Jakie równości odcinków wynikają z określenia punktów K_1 i K_2?

2. Jaka równość odcinków wynika z określenia punktu K_3?

3. Zwróć uwagę na trójkąt $K_1K_2K_3$.

Bukiet 7

1. Wymnóż nawiasy.

2. Zwróć uwagę na różnicę między czynnikami tego iloczynu.

3. Przypuśćmy, że ta liczba jest podzielna przez 25. Co wynika z zadań 1 i 2?

Bukiet 8

1. Połącz środek okręgu wpisanego z wierzchołkami trójkąta.

2. Połącz środek okręgu dopisanego do boku trójkąta z końcami tego boku.

3. Korzystając z poprzednich zadań oblicz odwrotności promieni.

Bukiet 9

1. Zauważ, że $AB = A0 + B$.

2. Tu chodzi o liczby postaci $k \cdot A$, gdzie $k = \dots$

3. Z zadania 1 wiemy, że B spełnia warunki zadania 2.

Bukiet 10
3. Jak trzeba „zadziałać” na obie strony równania, aby po lewej stronie został sam x?

Bukiet 11

1. Zwróć uwagę na trójkąty prostokątne.

2. To jest kąt środkowy w okręgu z zadania 1.

3. Co wiemy o tym trójkącie z zadań 1 i 2?

Bukiet 12

1. Rozważ możliwe układy wybranych punktów na jednej przekątnej. Przyjrzyj się pozostałym przekątnym zawierającym wybrane punkty.

2. Na każdej przekątnej powinno być tyle samo liczb n.

3. Wykorzystaj zadanie 2 dla poszczególnych liczb pierwszych.

Bukiet 13

1. W jakich potęgach liczba 2 występuje w rozkładach na czynniki pierwsze liczb 1, 2, 3, …, n?

3. Co można o tej sumie powiedzieć na podstawie zadania 2?

Bukiet 14

2. Rozważ oddzielnie przypadki, gdy n jest parzyste i gdy n jest nieparzyste.

3. Z zadania 2 wywnioskuj, jaka jest najmniejsza liczba n+1-cyfrowa podzielna przez 11.