

# INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw XIV (22 IV 2003)

**Zadanie 1.** Dane są dwie liczby naturalne nie będące kwadratami liczb naturalnych. Udowodnij, że suma ich pierwiastków jest liczbą niewymierną.

**Zadanie 2.** Danych jest  $2n$  liczb dodatnich mniejszych od  $M$ . Udowodnij, że suma pewnych  $n$  z danych liczb jest większa od sumy  $n$  pozostałych o mniej niż  $M$ .

**Zadanie 3.** Ile jest liczb trzycyfrowych niepodzielnych przez 7 ani przez 13?

**Zadanie 4.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  dwusieczna kąta przy wierzchołku  $A$  przecina przeciwprostokątną  $BC$  w punkcie  $D$ . Wykaż, że

$$\frac{1}{BD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{2}{AD^2}.$$

**Zadanie 5.** Na płaszczyźnie dane są cztery punkty nie leżące na jednym okręgu, przy czym żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów oznaczamy znakiem „+”, jeśli leży na zewnątrz okręgu przechodzącego przez pozostałe trzy punkty, a znakiem „-”, jeśli leży wewnątrz tego okręgu. Ile z danych punktów może być oznaczonych znakiem „+”?