

INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw XII (25 III 2003)

Zadanie 1. Wykaż, że do dowolnej liczby naturalnej w zapisie dziesiętnym można dopisać pewną liczbę cyfr tak, aby otrzymać sześcian liczby naturalnej.

Zadanie 2. Dany jest rosnący ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, \dots o tej własności, że ciąg $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ jest ograniczony. Udowodnij, że $a_m + a_{n+1} = a_n + a_{m+1}$ dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi, to w przedziale

$$\left[x, x + y + \frac{x}{y} + 1 \right]$$

leży co najmniej jeden kwadrat liczby całkowitej.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego $n \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Dane są liczby dodatnie a, b, c oraz liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 . Wykaż, że funkcja

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + b(x - x_2)(x - x_3) + c(x - x_3)(x - x_1)$$

ma pierwiastek rzeczywisty.