

# INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw XI (11 III 2003)

**Zadanie 1.** Z jakim wykładnikiem występuje liczba 23 w rozkładzie liczby 2003! na czynniki pierwsze?

**Zadanie 2.** Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste  $x, y, z$  spełniają warunki

$$x + y + z = xy + yz + zx \quad \text{i} \quad xyz = 1,$$

to co najmniej jedna z nich jest równa 1.

**Zadanie 3.** Udowodnij, że jeżeli suma liczb nieujemnych  $a, b, c, d$  wynosi 1, to

$$ab + bc + cd \leq \frac{1}{4}.$$

**Zadanie 4.** Ciąg  $(x_n)$  jest określony następująco:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Znajdź wzór ogólny na  $x_n$ .

**Zadanie 5.** Przez punkt  $K$  leżący na podstawie  $AB$  trójkąta równoramiennego  $ABC$  ( $|AC| = |BC|$ ) poprowadzono prostą przecinającą ramię  $AC$  w punkcie  $L$ , a przedłużenie ramienia  $BC$  w punkcie  $M$ . Niech  $D$  będzie punktem, w którym dwusieczna kąta przy wierzchołku  $A$  przecina okrąg opisany na trójkącie  $ABC$ . Udowodnij, że punkt  $K$  jest środkiem odcinka  $LM$  wtedy i tylko wtedy, gdy prosta  $DK$  jest prostopadła do prostej  $LM$ .