

# INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw VII (5 I 2003)

**Zadanie 1.** Nieujemną liczbę całkowitą nazywamy rosnącą, jeśli ciąg cyfr jej zapisu dziesiętnego, od lewej do prawej, jest ciągiem rosnącym (być może jednoelementowym). Wykaż, że liczb rosnących o nieparzystej liczbie cyfr jest o dwie więcej, niż liczb rosnących o parzystej liczbie cyfr.

**Zadanie 2.** Dane są liczby całkowite  $a, b, c, d$ . Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej  $n$  każdy wspólny dzielnik liczb  $an + b$  i  $cn + d$  jest dzielnikiem liczby  $ad - bc$ .

**Zadanie 3.** Funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia dla każdego  $x \neq 0$  równanie  $g(x) \cdot g(\frac{1}{x}) = 1$ . Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona za pomocą funkcji  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  równością

$$f(x) = h(x) + g(x) \cdot h\left(\frac{1}{x}\right)$$

dla  $x \in \mathbb{R}$ . Sprawdź, że jeżeli  $x \neq 0$  jest pierwiastkiem funkcji  $f$ , to  $\frac{1}{x}$  też jest pierwiastkiem funkcji  $f$ .

**Zadanie 4.** Znajdź najmniejszą możliwą wartość stosunku promienia okręgu wpisanego do wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym.

**Zadanie 5.** W trójkącie  $ABC$  wysokość  $AD$  jest równa bokowi  $BC$ . Rozważmy trójkąt  $A'B'C'$ , w którym  $|A'B'| = |AB|$ ,  $|A'C'| = |AC|$  i  $|\angle A'| = 90^\circ - |\angle A|$ . Udowodnij, że

$$|B'C'| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2}.$$