

# INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw IV (12 XI 2002)

**Zadanie 1.** Pokaż, że jeśli  $p + q = 1$ , to

$$p^2 + q^2 - p^3 - q^3 = pq.$$

**Zadanie 2.** Dana jest liczba naturalna  $n > 1$ . Wykaż, że jeżeli  $n^k + 1 \mid n^l + 1$  dla pewnych naturalnych  $k$  i  $l$ , to  $k \mid l$ .

**Zadanie 3.** Ile cyfr mają w sumie liczby  $2^n$  i  $5^n$ ?

**Zadanie 4.** Dana jest liczba rzeczywista  $a \in (0, 4)$ . Określamy ciągi  $(x_n)$  i  $(y_n)$  w sposób następujący:

$$x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{a}}, \quad y_1 = \sqrt{2 - \sqrt{a}},$$

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad y_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sprawdź, że ciągi  $(x_n)$  i  $(y_n)$  są określone poprawnie i wykaż, że ciąg  $z_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot y_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , jest stały.

**Zadanie 5.** Wykaż, że pole trójkąta o bokach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jest nie mniejsze od

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$