Internetowe Kółko Matematyczne

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw IV* (12 XI 2002)

Zadanie 1. Pokaż, że jeśli $p+q=1$, to

$$p^2+q^2-p^3-q^3=pq.$$

Zadanie 2. Dana jest liczba naturalna $n>1$. Wykaż, że jeżeli $n^k+1 \mid n^l+1$ dla pewnych naturalnych k i l, to $k \mid l$.

Zadanie 3. Ile cyfr mają w sumie liczby 2^n i 5^n?

Zadanie 4. Dana jest liczba rzeczywista $a \in (0,4)$. Określamy ciągi (x_n) i (y_n) w sposób następujący:

$$x_1=\sqrt{2+\sqrt{a}}, \qquad y_1=\sqrt{2-\sqrt{a}},$$

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, \qquad y_{n+1}=\sqrt{2-x_n}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Sprawdź, że ciągi (x_n) i (y_n) są określone poprawnie i wykaż, że ciąg $z_n=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot y_n$, $n=1,2,3,\ldots$, jest stały.

Zadanie 5. Wykaż, że pole trójkąta o bokach a, b, c jest nie mniejsze od

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

Internetowe Kółko Matematyczne

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw IV* (12 XI 2002)

Zadanie 1. Pokaż, że jeśli $p+q=1$, to

$$p^2+q^2-p^3-q^3=pq.$$

Zadanie 2. Dana jest liczba naturalna $n>1$. Wykaż, że jeżeli $n^k+1 \mid n^l+1$ dla pewnych naturalnych k i l, to $k \mid l$.

Zadanie 3. Ile cyfr mają w sumie liczby 2^n i 5^n?

Zadanie 4. Dana jest liczba rzeczywista $a \in (0,4)$. Określamy ciągi (x_n) i (y_n) w sposób następujący:

$$x_1=\sqrt{2+\sqrt{a}}, \qquad y_1=\sqrt{2-\sqrt{a}},$$

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, \qquad y_{n+1}=\sqrt{2-x_n}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Sprawdź, że ciągi (x_n) i (y_n) są określone poprawnie i wykaż, że ciąg $z_n=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot y_n$, $n=1,2,3,\ldots$, jest stały.

Zadanie 5. Wykaż, że pole trójkąta o bokach a, b, c jest nie mniejsze od

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

Internetowe Kółko Matematyczne

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw IV* (12 XI 2002)

Zadanie 1. Pokaż, że jeśli $p+q=1$, to

$$p^2+q^2-p^3-q^3=pq.$$

Zadanie 2. Dana jest liczba naturalna $n>1$. Wykaż, że jeżeli $n^k+1 \mid n^l+1$ dla pewnych naturalnych k i l, to $k \mid l$.

Zadanie 3. Ile cyfr mają w sumie liczby 2^n i 5^n?

Zadanie 4. Dana jest liczba rzeczywista $a \in (0,4)$. Określamy ciągi (x_n) i (y_n) w sposób następujący:

$$x_1=\sqrt{2+\sqrt{a}}, \qquad y_1=\sqrt{2-\sqrt{a}},$$

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, \qquad y_{n+1}=\sqrt{2-x_n}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Sprawdź, że ciągi (x_n) i (y_n) są określone poprawnie i wykaż, że ciąg $z_n=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot y_n$, $n=1,2,3,\ldots$, jest stały.

Zadanie 5. Wykaż, że pole trójkąta o bokach a, b, c jest nie mniejsze od

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

Internetowe Kółko Matematyczne

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw IV* (12 XI 2002)

Zadanie 1. Pokaż, że jeśli $p+q=1$, to

$$p^2+q^2-p^3-q^3=pq.$$

Zadanie 2. Dana jest liczba naturalna $n>1$. Wykaż, że jeżeli $n^k+1 \mid n^l+1$ dla pewnych naturalnych k i l, to $k \mid l$.

Zadanie 3. Ile cyfr mają w sumie liczby 2^n i 5^n?

Zadanie 4. Dana jest liczba rzeczywista $a \in (0,4)$. Określamy ciągi (x_n) i (y_n) w sposób następujący:

$$x_1=\sqrt{2+\sqrt{a}}, \qquad y_1=\sqrt{2-\sqrt{a}},$$

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, \qquad y_{n+1}=\sqrt{2-x_n}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Sprawdź, że ciągi (x_n) i (y_n) są określone poprawnie i wykaż, że ciąg $z_n=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot y_n$, $n=1,2,3,\ldots$, jest stały.

Zadanie 5. Wykaż, że pole trójkąta o bokach a, b, c jest nie mniejsze od

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$