

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

29 IV 2003

*Bukiet 14*

Dane są liczby dodatnie  $a$  i  $b$ . Określmy ciąg  $(x_n)$  następująco:

$$x_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Oznaczmy przez  $c$  liczbę dodatnią spełniającą warunek

$$\sqrt{a + c} = c.$$

**1. a)** Niech  $n$  będzie dowolną liczbą naturalną. Pokaż, że jeżeli  $x_n < x_{n+1}$ , to  $x_{n+1} < x_{n+2}$ , jeżeli  $x_n = x_{n+1}$ , to  $x_{n+1} = x_{n+2}$ , a jeżeli  $x_n > x_{n+1}$ , to  $x_{n+1} > x_{n+2}$ .

**b)** Udowodnij (indukcyjnie), że ciąg  $(x_n)$  jest ściśle monotoniczny lub stały.

**c)** Wykaż, że jeżeli  $b < c$ , to ciąg  $(x_n)$  jest rosnący, jeżeli  $b = c$ , to ciąg  $(x_n)$  jest stały, a jeżeli  $b > c$ , to ciąg  $(x_n)$  jest malejący.

**2. a)** Niech  $n$  będzie dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że jeżeli  $x_n < c$ , to  $x_{n+1} < c$ , jeżeli  $x_n = c$ , to  $x_{n+1} = c$ , a jeżeli  $x_n > c$ , to  $x_{n+1} > c$ .

**b)** Udowodnij (indukcyjnie), że jeżeli  $b < c$ , to ciąg  $(x_n)$  jest ograniczony z góry przez  $c$ , a jeżeli  $b > c$ , to ciąg  $(x_n)$  jest ograniczony z dołu przez  $c$ .

**3.** Uzasadnij, że ciąg  $(x_n)$  jest zbieżny i znajdź jego granicę.