Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

1 IV 2003 *Bukiet 12*

Niech a_n będzie największą możliwą liczbą części, na które może podzielić płaszczyznę n różnych prostych ($n = 0, 1, 2, \ldots$), na przykład $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.

1. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że na płaszczyźnie jest $n-1$ prostych, które dzielą ją na a_{n-1} części. Rozważmy nową (n-tą) prostą.

a) Na ile najwięcej części dane $n-1$ prostych może podzielić tę prostą?

b) Jaka jest największa liczba części podziału płaszczyzny danymi $n-1$ prostymi, przez które może przechodzić n-ta prosta?

2. Udowodnij dla $n \geqslant 1$ wzór $a_n = a_{n-1} + n$.

3. Wyprowadź jawny wzór na a_n.

Niech b_n będzie największą możliwą liczbą części, na które może podzielić przestrzeń n różnych płaszczyzn ($n = 0, 1, 2, \ldots$), na przykład $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4$.

4. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że w przestrzeni jest $n-1$ płaszczyzn, które dzielą ją na b_{n-1} części. Rozważmy nową (n-tą) prostą.

a) Na ile najwięcej części dane $n-1$ płaszczyzn może podzielić tę płaszczyznę?

b) Jaka jest największa liczba części podziału przestrzeni danymi $n-1$ płaszczyznami, przez które może przechodzić n-ta płaszczyzna?

5. Udowodnij dla $n \geqslant 1$ wzór $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$.

6. Wyprowadź wzór na b_n.