

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

25 II 2003

Bukiet 10

Dany jest czworościan $ABCD$. Niech punkty K, L, M, P, Q, R będą odpowiednio środkami krawędzi AD, BD, CD, BC, CA, AB . Niech h_A, h_B, h_C, h_D będą prostymi zawierającymi wysokości czworościanu poprowadzone odpowiednio przez punkty A, B, C, D .

1. a) Uzasadnij, że czworokąty $KLPQ, LMQR$ i $MKRP$ są równoległobokami.

b) Zauważ, że odcinki KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem każdego z nich.

2. a) Pokaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów boków jest równa sumie kwadratów przekątnych.

b) Udowodnij równoważność:

$|AC|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2 \Leftrightarrow |KP| = |LQ| \Leftrightarrow KLPQ$ jest prostokątem.

3. Niech A' i B' będą odpowiednio rzutami prostopadłymi punktów A i B na prostą CD . Udowodnij równoważność:

$$AB \perp CD \Leftrightarrow A' = B' \Leftrightarrow h_A \text{ i } h_B \text{ się przecinają.}$$

4. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(i) Proste h_A, h_B, h_C i h_D przecinają się w jednym punkcie;

(ii) $AD \perp BC, BD \perp CA$ i $CD \perp AB$;

(iii) $|KP| = |LQ| = |MR|$;

(iv) $|AD|^2 + |BC|^2 = |BD|^2 + |CA|^2 = |CD|^2 + |AB|^2$.