

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

11 II 2003

Bukiet 9

Liczbę całkowitą nazywamy **kwadratem**, jeśli jest kwadratem liczby całkowitej. Liczbę całkowitą nazywamy **liczbą bezkwadratową**, jeśli nie jest podzielna przez żaden kwadrat większy od 1.

1. Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić w postaci iloczynu kwadratu i liczby bezkwadratowej.
2. Wykaż, że jeżeli pierwiastek liczby całkowitej jest liczbą wymierną, to (ten pierwiastek) jest liczbą całkowitą.
3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 0$, $n = m^2 \cdot r$, gdzie m jest liczbą całkowitą, a r jest liczbą bezkwadratową. Pokaż, że jeżeli liczby całkowite x i y spełniają równanie $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$, to liczby \sqrt{xr} i \sqrt{yr} są całkowite.
4. Uzasadnij, że jeśli kwadrat jest podzielny przez liczbę bezkwadratową, to jest podzielny również przez jej kwadrat.
5. Opisz wszystkie rozwiązania równania $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$ w liczbach całkowitych x, y , gdzie n jest daną liczbą całkowitą.