

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

14 I 2003

Bukiet 7

Dane są liczby rzeczywiste a i b . Szukamy ciągów (x_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, spełniających równanie

$$(\star) \quad x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

1. Uzasadnij, że istnieje dokładnie jeden ciąg (x_n) , spełniający równanie (\star) , o danych wyrazach x_0 i x_1 .

2. Dla jakich $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ciąg $x_n = q^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, spełnia równanie (\star) ?

3. Czy istnieje takie $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, że ciąg postaci $x_n = nq^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, spełnia równanie (\star) ?

4. Zauważ, że jeśli ciągi (x'_n) i (x''_n) spełniają równanie (\star) , to dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}$ ciąg $(ux'_n + vx''_n)$ też spełnia równanie (\star) .

5. Znajdź ciągi spełniające warunki:

a) $x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$

b) $x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$

6. Dane są liczby rzeczywiste a , b i c . Przedyskutuj sposób szukania ciągów (x_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, spełniających równanie

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n + c = 0 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$