

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

17 XII 2002

Bukiet 6

W tym bukiecie dopuszczamy zapis dziesiętny liczby naturalnej zaczynający się od samych zer. Oznacza to, że za liczby n -cyfrowe uważamy liczby od 0 do $10^n - 1$. Ponadto dla każdej liczby naturalnej jest określona jej n -cyfrowa końcówka (na przykład czterocyfrową końcówką liczby 12 jest 0012).

Mówimy, że liczba A spełnia warunek \mathcal{W}_n (gdzie n jest liczbą naturalną), jeśli jej n -cyfrowa końcówka jest taka sama jak n -cyfrowa końcówka liczby A^2 , czyli $10^n \mid A^2 - A$.

1. Znajdź wszystkie liczby jednocyfrowe spełniające warunek \mathcal{W}_1 .

W zadaniach 2. i 3. chcemy dla danej liczby n -cyfrowej A_n spełniającej warunek \mathcal{W}_n znaleźć taką cyfrę a_n , by liczba $n + 1$ -cyfrowa $A_{n+1} = 10^n \cdot a_n + A_n$ spełniała warunek \mathcal{W}_{n+1} .

2. Pokaż, że dla: a) $A_n = 0$, b) $A_n = 1$, jedyną możliwością to $a_n = 0$, i wówczas a) $A_{n+1} = 0$, b) $A_{n+1} = 1$.

3. Jaką cyfrę należy przyjąć za a_n , jeśli ostatnią cyfrą A_n jest: a) 5, b) 6? Podaj te cyfry dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

4. Udowodnij, że dla każdego n istnieją dokładnie cztery liczby n -cyfrowe (czyli od 0 do $10^n - 1$) spełniające warunek \mathcal{W}_n .