

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

3 XII 2002

*Bukiet 5*

1. Wykaż, że dla dowolnego naturalnego  $n \geq 1$  i dowolnego rzeczywistego  $x \geq -1$  zachodzi **nierówność Bernoulliego**

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Zauważ, że w tej nierówności ma miejsce równość dokładnie wtedy, gdy  $n = 1$  lub  $x = 0$ .

2. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego  $n \geq 2$  zachodzą nierówności:

a)

$$\frac{(n-1)^n \cdot (n+1)^n}{n^{2n}} > \frac{n-1}{n},$$

b)

$$\frac{n^{2n+2}}{(n-1)^{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} > \frac{n}{n-1}.$$

3. Pokaż, że:

a) ciąg  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  jest rosnący,

b) ciąg  $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  jest malejący.

4. Uzasadnij, że  $a_k < b_l$  dla dowolnych naturalnych  $k, l$ .

5. Udowodnij, że ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne do tej samej granicy.