Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

29 IV 2003 *Bukiet 14*

Dane są liczby dodatnie a i b. Określmy ciąg (x_n) następująco:

$$x_1 = b, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Oznaczmy przez c liczbę dodatnią spełniającą warunek $\sqrt{a+c} = c$.

1. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Pokaż, że jeżeli $x_n < x_{n+1}$, to $x_{n+1} < x_{n+2}$, jeżeli $x_n = x_{n+1}$, to $x_{n+1} = x_{n+2}$, a jeżeli $x_n > x_{n+1}$, to $x_{n+1} > x_{n+2}$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że ciąg (x_n) jest ściśle monotoniczny lub stały.

c) Wykaż, że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest rosnący, jeżeli $b = c$, to ciąg (x_n) jest stały, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest malejący.

2. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że jeżeli $x_n < c$, to $x_{n+1} < c$, jeżeli $x_n = c$, to $x_{n+1} = c$, a jeżeli $x_n > c$, to $x_{n+1} > c$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z góry przez c, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z dołu przez c.

3. Uzasadnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny i znajdź jego granicę.

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

29 IV 2003 *Bukiet 14*

Dane są liczby dodatnie a i b. Określmy ciąg (x_n) następująco:

$$x_1 = b, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Oznaczmy przez c liczbę dodatnią spełniającą warunek $\sqrt{a+c} = c$.

1. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Pokaż, że jeżeli $x_n < x_{n+1}$, to $x_{n+1} < x_{n+2}$, jeżeli $x_n = x_{n+1}$, to $x_{n+1} = x_{n+2}$, a jeżeli $x_n > x_{n+1}$, to $x_{n+1} > x_{n+2}$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że ciąg (x_n) jest ściśle monotoniczny lub stały.

c) Wykaż, że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest rosnący, jeżeli $b = c$, to ciąg (x_n) jest stały, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest malejący.

2. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że jeżeli $x_n < c$, to $x_{n+1} < c$, jeżeli $x_n = c$, to $x_{n+1} = c$, a jeżeli $x_n > c$, to $x_{n+1} > c$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z góry przez c, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z dołu przez c.

3. Uzasadnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny i znajdź jego granicę.

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

29 IV 2003 *Bukiet 14*

Dane są liczby dodatnie a i b. Określmy ciąg (x_n) następująco:

$$x_1 = b, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Oznaczmy przez c liczbę dodatnią spełniającą warunek $\sqrt{a+c} = c$.

1. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Pokaż, że jeżeli $x_n < x_{n+1}$, to $x_{n+1} < x_{n+2}$, jeżeli $x_n = x_{n+1}$, to $x_{n+1} = x_{n+2}$, a jeżeli $x_n > x_{n+1}$, to $x_{n+1} > x_{n+2}$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że ciąg (x_n) jest ściśle monotoniczny lub stały.

c) Wykaż, że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest rosnący, jeżeli $b = c$, to ciąg (x_n) jest stały, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest malejący.

2. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że jeżeli $x_n < c$, to $x_{n+1} < c$, jeżeli $x_n = c$, to $x_{n+1} = c$, a jeżeli $x_n > c$, to $x_{n+1} > c$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z góry przez c, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z dołu przez c.

3. Uzasadnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny i znajdź jego granicę.

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

29 IV 2003 *Bukiet 14*

Dane są liczby dodatnie a i b. Określmy ciąg (x_n) następująco:

$$x_1 = b, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Oznaczmy przez c liczbę dodatnią spełniającą warunek $\sqrt{a+c} = c$.

1. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Pokaż, że jeżeli $x_n < x_{n+1}$, to $x_{n+1} < x_{n+2}$, jeżeli $x_n = x_{n+1}$, to $x_{n+1} = x_{n+2}$, a jeżeli $x_n > x_{n+1}$, to $x_{n+1} > x_{n+2}$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że ciąg (x_n) jest ściśle monotoniczny lub stały.

c) Wykaż, że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest rosnący, jeżeli $b = c$, to ciąg (x_n) jest stały, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest malejący.

2. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że jeżeli $x_n < c$, to $x_{n+1} < c$, jeżeli $x_n = c$, to $x_{n+1} = c$, a jeżeli $x_n > c$, to $x_{n+1} > c$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z góry przez c, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z dołu przez c.

3. Uzasadnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny i znajdź jego granicę.