25 II 2003 *Bukiet 10*

Dany jest czworościan $ABCD$. Niech punkty K, L, M, P, Q, R będą odpowiednio środkami krawędzi AD, BD, CD, BC, CA, AB. Niech h_A, h_B, h_C, h_D będą prostymi zawierającymi wysokości czworościanu poprowadzone odpowiednio przez punkty A, B, C, D.

1. a) Uzasadnij, że czworokąty $KLPQ$, $LMQR$ i $MKRP$ są równoległobokami.
b) Zauważ, że odcinki KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem każdego z nich.

2. a) Pokaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów boków jest równa sumie kwadratów przekątnych.
b) Udowodnij równoważność:

$$|AC|^2+|BD|^2 = |BC|^2+|AD|^2 \Leftrightarrow |KP| = |LQ| \Leftrightarrow KLPQ$$

jest prostokątem.

3. Niech A' i B' będą odpowiednio rzutami prostopadłymi punktów A i B na prostą CD. Udowodnij równoważność:

$$AB \perp CD \Leftrightarrow A' = B' \Leftrightarrow h_A \text{ i } h_B \text{ się przecinają.}$$

4. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
(*i*) Proste h_A, h_B, h_C i h_D przecinają się w jednym punkcie;
(*ii*) $AD \perp BC$, $BD \perp CA$ i $CD \perp AB$;
(*iii*) $|KP| = |LQ| = |MR|$;
(*iv*) $|AD|^2 + |BC|^2 = |BD|^2 + |CA|^2 = |CD|^2 + |AB|^2$.

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

25 II 2003 *Bukiet 10*

Dany jest czworościan $ABCD$. Niech punkty K, L, M, P, Q, R będą odpowiednio środkami krawędzi AD, BD, CD, BC, CA, AB. Niech h_A, h_B, h_C, h_D będą prostymi zawierającymi wysokości czworościanu poprowadzone odpowiednio przez punkty A, B, C, D.

1. a) Uzasadnij, że czworokąty $KLPQ$, $LMQR$ i $MKRP$ są równoległobokami.
b) Zauważ, że odcinki KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem każdego z nich.

2. a) Pokaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów boków jest równa sumie kwadratów przekątnych.
b) Udowodnij równoważność:

$$|AC|^2+|BD|^2 = |BC|^2+|AD|^2 \Leftrightarrow |KP| = |LQ| \Leftrightarrow KLPQ$$

jest prostokątem.

3. Niech A' i B' będą odpowiednio rzutami prostopadłymi punktów A i B na prostą CD. Udowodnij równoważność:

$$AB \perp CD \Leftrightarrow A' = B' \Leftrightarrow h_A \text{ i } h_B \text{ się przecinają.}$$

4. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
(*i*) Proste h_A, h_B, h_C i h_D przecinają się w jednym punkcie;
(*ii*) $AD \perp BC$, $BD \perp CA$ i $CD \perp AB$;
(*iii*) $|KP| = |LQ| = |MR|$;
(*iv*) $|AD|^2 + |BC|^2 = |BD|^2 + |CA|^2 = |CD|^2 + |AB|^2$.

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

25 II 2003 *Bukiet 10*

Dany jest czworościan $ABCD$. Niech punkty K, L, M, P, Q, R będą odpowiednio środkami krawędzi AD, BD, CD, BC, CA, AB. Niech h_A, h_B, h_C, h_D będą prostymi zawierającymi wysokości czworościanu poprowadzone odpowiednio przez punkty A, B, C, D.

1. a) Uzasadnij, że czworokąty $KLPQ$, $LMQR$ i $MKRP$ są równoległobokami.
b) Zauważ, że odcinki KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem każdego z nich.

2. a) Pokaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów boków jest równa sumie kwadratów przekątnych.
b) Udowodnij równoważność:

$$|AC|^2+|BD|^2 = |BC|^2+|AD|^2 \Leftrightarrow |KP| = |LQ| \Leftrightarrow KLPQ$$

jest prostokątem.

3. Niech A' i B' będą odpowiednio rzutami prostopadłymi punktów A i B na prostą CD. Udowodnij równoważność:

$$AB \perp CD \Leftrightarrow A' = B' \Leftrightarrow h_A \text{ i } h_B \text{ się przecinają.}$$

4. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
(*i*) Proste h_A, h_B, h_C i h_D przecinają się w jednym punkcie;
(*ii*) $AD \perp BC$, $BD \perp CA$ i $CD \perp AB$;
(*iii*) $|KP| = |LQ| = |MR|$;
(*iv*) $|AD|^2 + |BC|^2 = |BD|^2 + |CA|^2 = |CD|^2 + |AB|^2$.

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

25 II 2003 *Bukiet 10*

Dany jest czworościan $ABCD$. Niech punkty K, L, M, P, Q, R będą odpowiednio środkami krawędzi AD, BD, CD, BC, CA, AB. Niech h_A, h_B, h_C, h_D będą prostymi zawierającymi wysokości czworościanu poprowadzone odpowiednio przez punkty A, B, C, D.

1. a) Uzasadnij, że czworokąty $KLPQ$, $LMQR$ i $MKRP$ są równoległobokami.
b) Zauważ, że odcinki KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem każdego z nich.

2. a) Pokaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów boków jest równa sumie kwadratów przekątnych.
b) Udowodnij równoważność:

$$|AC|^2+|BD|^2 = |BC|^2+|AD|^2 \Leftrightarrow |KP| = |LQ| \Leftrightarrow KLPQ$$

jest prostokątem.

3. Niech A' i B' będą odpowiednio rzutami prostopadłymi punktów A i B na prostą CD. Udowodnij równoważność:

$$AB \perp CD \Leftrightarrow A' = B' \Leftrightarrow h_A \text{ i } h_B \text{ się przecinają.}$$

4. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
(*i*) Proste h_A, h_B, h_C i h_D przecinają się w jednym punkcie;
(*ii*) $AD \perp BC$, $BD \perp CA$ i $CD \perp AB$;
(*iii*) $|KP| = |LQ| = |MR|$;
(*iv*) $|AD|^2 + |BC|^2 = |BD|^2 + |CA|^2 = |CD|^2 + |AB|^2$.