8 X 2002 *Bukiet I*

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Jej wszystkie dzielniki naturalne to

$$1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = n.$$

**Zadanie 1.** Zauważ, że $a_k \cdot a_{m-k} = n$ dla $k = 0, 1, \ldots, m$.

**Zadanie 2.** Wykaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_k + a_{m-k}}{2} \geqslant \sqrt{n}.$$

**Zadanie 3.** Sprawdź, że jeżeli $x, y \geqslant 1$, to

$$xy - x - y + 1 \geqslant 0.$$

**Zadanie 4.** Pokaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$a_k + a_{m-k} \leqslant n + 1.$$

**Zadanie 5.** Udowodnij, że

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_m}{m+1} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

8 X 2002 *Bukiet I*

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Jej wszystkie dzielniki naturalne to

$$1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = n.$$

**Zadanie 1.** Zauważ, że $a_k \cdot a_{m-k} = n$ dla $k = 0, 1, \ldots, m$.

**Zadanie 2.** Wykaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_k + a_{m-k}}{2} \geqslant \sqrt{n}.$$

**Zadanie 3.** Sprawdź, że jeżeli $x, y \geqslant 1$, to

$$xy - x - y + 1 \geqslant 0.$$

**Zadanie 4.** Pokaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$a_k + a_{m-k} \leqslant n + 1.$$

**Zadanie 5.** Udowodnij, że

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_m}{m+1} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

8 X 2002 *Bukiet I*

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Jej wszystkie dzielniki naturalne to

$$1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = n.$$

**Zadanie 1.** Zauważ, że $a_k \cdot a_{m-k} = n$ dla $k = 0, 1, \ldots, m$.

**Zadanie 2.** Wykaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_k + a_{m-k}}{2} \geqslant \sqrt{n}.$$

**Zadanie 3.** Sprawdź, że jeżeli $x, y \geqslant 1$, to

$$xy - x - y + 1 \geqslant 0.$$

**Zadanie 4.** Pokaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$a_k + a_{m-k} \leqslant n + 1.$$

**Zadanie 5.** Udowodnij, że

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_m}{m+1} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

8 X 2002 *Bukiet I*

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Jej wszystkie dzielniki naturalne to

$$1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = n.$$

**Zadanie 1.** Zauważ, że $a_k \cdot a_{m-k} = n$ dla $k = 0, 1, \ldots, m$.

**Zadanie 2.** Wykaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_k + a_{m-k}}{2} \geqslant \sqrt{n}.$$

**Zadanie 3.** Sprawdź, że jeżeli $x, y \geqslant 1$, to

$$xy - x - y + 1 \geqslant 0.$$

**Zadanie 4.** Pokaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$a_k + a_{m-k} \leqslant n + 1.$$

**Zadanie 5.** Udowodnij, że

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_m}{m+1} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$