

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY PODSTAWOWEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

8 X 2002

Bukiet 1

Dany jest sześciokąt $ABCDEF$, którego wszystkie kąty są równe 120° . Proste AB i CD przecinają się w punkcie K , proste CD i EF w punkcie L , a proste EF i AB w punkcie M .

1. Wskaż trójkąty równoboczne.
2. Zauważ, że $|KL| = |BC| + |CD| + |DE|$. Wyprowadź podobne zależności dla długości odcinków LM i MK .
3. Sprawdź, że

$$|AB| - |DE| = |EF| - |BC| = |CD| - |FA|.$$

22 X 2002

Bukiet 2

1. Dlaczego iloczyn dowolnych dwóch kolejnych liczb naturalnych jest parzysty, a iloczyn dowolnych trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 3?
2. Zauważ, że zawsze jedna z dwóch kolejnych liczb parzystych dzieli się przez 4.
3. Znajdź największą liczbę, przez którą jest podzielny każdy iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych.

5 XI 2002

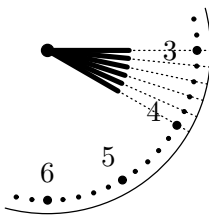
Bukiet 3

1. Ktoś napisał liczby: 1, 2, 4 i obliczył możliwe sumy dwóch z tych liczb ($1 + 2$, $1 + 4$, $2 + 4$), a także sumę wszystkich trzech liczb ($1 + 2 + 4$). Ustaw dane liczby i obliczone sumy w kolejności od najmniejszej do największej.
2. Napisz liczby 1, 2, 4 i 8, oblicz wszystkie możliwe sumy dwóch i trzech z danych liczb oraz sumę wszystkich czterech liczb. Napisane liczby i obliczone sumy ustaw w kolejności od najmniejszej do największej.
3. Podaj pięć takich liczb naturalnych, aby po wypisaniu tych liczb wraz z wszystkimi sumami (dwóch, trzech, czterech i wszystkich pięciu liczb), otrzymać wszystkie liczby od 1 do 31.

19 XI 2002

Bukiet 4

1. Na rysunku zaznaczono kilka położeń wskazówki godzinowej od 15^{00} do 16^{00} . Dla każdego z tych położeń określ dokładny czas.



2. Gdzie dokładnie jest wskazówka godzinowa o 15¹⁸?
3. Kiedy kąt między wskazówkami zegara jest mniejszy: o 15¹⁶ czy o 15¹⁷?

3 XII 2002

Bukiet 5

1. Ile jest liczb dwucyfrowych, których cyfra dziesiątek jest różna od cyfry jedności?
2. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfry setek, dziesiątek i jedności są różne?
3. Ile jest liczb czterocyfrowych, których wszystkie cztery cyfry są różne?

17 XII 2002

Bukiet 6

Znajdź miary kątów trójkąta równoramiennego, w którym (sześć różnych zadań):

1. kąt przy podstawie ma miarę 20°;
2. kąt między ramionami ma miarę: a) 80°, b) 120°;
3. jeden z kątów ma miarę: a) 40°, b) 60°, c) 100°.

14 I 2003

Bukiet 7

Dana jest liczba czterocyfrowa $ABCD$, w której $A > D + 1$.

1. Oblicz pisemnie różnicę $ABCD - DCBA$ w zależności od tego, czy:

$$\text{a) } B > C, \quad \text{b) } B = C, \quad \text{c) } B < C.$$

2. Oznaczmy liczbę obliczoną w zadaniu 1 przez $EFGH$. Oblicz sumę liczb $EFGH + HGFE$.

3. Zbadaj podobną własność liczb pięciocyfrowych i sześciocyfrowych.

28 I 2003

Bukiet 8

1. Liczbę 4 można przedstawić na trzy sposoby jako sumę dwóch liczb (całkowitych

dodatnich):

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1,$$

a liczbę 5 na cztery sposoby:

$$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1.$$

Na ile sposobów można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb następujące liczby: 6, 7, 8?

2. Na ile sposobów można przedstawić liczbę 10 w postaci sumy trzech liczb (całkowitych dodatnich), z których pierwszą jest: a) 1, b) 2, c) 3?

3. Na ile sposobów można przedstawić liczbę 15 w postaci sumy trzech liczb (całkowitych dodatnich)?

Uwaga. Sposoby różniące się kolejnością składników, np. $1 + 3$ i $3 + 1$, uważamy za różne. W danej sumie mogą występować jednakowe składniki, np. $2 + 2$.

11 II 2003

Bukiet 9

Znajdź cyfry jedności liczb:

1. $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7,$

2. $7^4, 7^8, 7^{12}, 7^{16}, 7^{20},$

3. $7^{2000}, 7^{2003}.$

25 II 2003

Bukiet 10

1. Podaj przykład dwóch kolejnych liczb naturalnych, których sumy cyfr różnią się o 8.

2. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną o tej własności, że liczba o 1 większa ma sumę cyfr o 17 mniejszą.

3. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną o sumie cyfr równej 44, posiadającą tę własność, że suma cyfr liczby o 1 większej wynosi 18.

18 III 2003

Bukiet 11

W zadaniach tego bukietu rozważamy monety: jednogroszówki, dziesięciogroszówki i złotych. Innych monet nie rozważamy.

1. Na ile monet można rozmiąć złotówkę? Znajdź wszystkie możliwości.

2. Wyznacz wszystkie sposoby rozmięcia 100 złotych na 199 monet.

3. Co można powiedzieć o liczbie monet, na które można rozmienić: a) złotówkę, b) 100 złotych? Czy 100 złotych można rozmienić na 200 monet?

1 IV 2003

Bukiet 12

1. Punkty A i B leżą po różnych stronach prostej k . Dla jakiego punktu C na prostej k suma

$$|AC| + |CB|$$

jest najmniejsza?

2. Punkt B nie leży na prostej k . Znajdź po drugiej stronie prostej k taki punkt B' , by dla każdego punktu C na prostej k odcinki CB i CB' były równe.

3. Punkty A i B leżą po jednej stronie prostej k . Na prostej k znajdź taki punkt C , dla którego suma

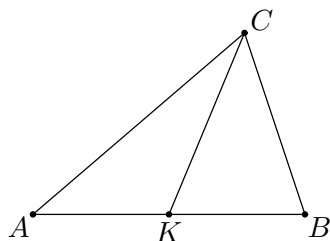
$$|AC| + |CB|$$

jest najmniejsza.

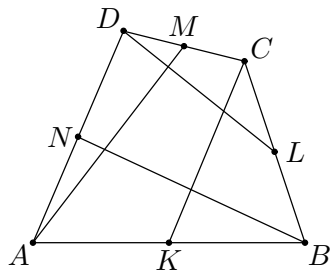
15 IV 2003

Bukiet 13

Jeśli punkt K jest środkiem boku AB trójkąta ABC , to trójkąty ACK i BCK mają równe pola. Dlaczego?



Punkty K, L, M, N są środkami boków czworokąta (wypukłego) $ABCD$.



Uzasadnij, że:

1. $P(ABN) = P(DBN)$, $P(BDL) = P(CDL)$;

2. $P(ADM) + P(BCK) = P(AKCM)$;

3. $P(AKCM) = P(BNDL)$.

29 IV 2003

Bukiet 14

1. Oblicz sumy:

$$1 + 20, \quad 2 + 19, \quad 3 + 18, \quad 4 + 17, \quad 5 + 16,$$

$$6 + 15, \quad 7 + 14, \quad 8 + 13, \quad 9 + 12, \quad 10 + 11.$$

2. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 20.

3. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

20 V 2003

Bukiet 15

1. Wypisz wszystkie dzielniki liczby 12 i każdy z nich rozłóż na czynniki pierwsze.

2. Znajdź liczbę podzielną przez 12, która ma:

a) 8 dzielników,

b) 9 dzielników.

3. Znajdź wszystkie liczby podzielne przez 12, które mają 12 dzielników.

Wskazówki do zadań

Bukiet 1

Uwaga. Sześciokąt $ABCDEF$ nie musi być foremny.

1. Oblicz wszystkie kąty.
2. Skorzystaj z równości boków w trójkątach równobocznych.
3. Wykorzystaj równości z zadania 2.

Bukiet 2

1. Co druga liczba całkowita jest parzysta, a co trzecia jest podzielna przez 3.
2. Podzielna przez 4 jest co czwarta liczba całkowita.
3. Liczba jest podzielna przez 24, gdy jest podzielna przez 3 i przez 8.

Bukiet 3

2. Powinno być 6 sum po dwie liczby i 4 sumy po trzy liczby.
3. Jaką liczbę należy dopisać do czterech liczb z zadania 2?

Bukiet 4

1. Na ile równych części został podzielony odcinek czasu od 15^{00} do 16^{00} ?
2. Które położenia z zadania 1 są najbliższe 15^{18} ?
3. Zrób dokładny rysunek z zaznaczonymi położeniami wskazówki minutowej o 15^{16} i o 15^{17} . Gdzie mniej-więcej jest wtedy wskazówka godzinowa? – skorzystaj z zadania 2.

Bukiet 5

1. Na ile sposobów można wybrać cyfrę dziesiątek liczby dwucyfrowej? Gdy wybrana jest cyfra dziesiątek, to na ile sposobów można wybrać różną od niej cyfrę jedności? Drugi sposób: ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych, a ile takich, których cyfry dziesiątek i jedności są równe?
2. Na ile sposobów można wybrać cyfrę setek liczby trzycyfrowej? Gdy wybrana jest cyfra setek, to na ile sposobów można wybrać różną od niej cyfrę dziesiątek? Gdy wybrane są cyfry setek i dziesiątek, to na ile sposobów można wybrać różną od nich cyfrę jedności?

Bukiet 6

1. Suma miar kątów trójkąta wynosi 180° .
2. Ile wynosi suma miar kątów przy podstawie?
3. Trzeba uwzględnić dwa przypadki: kąt przy podstawie i kąt między ramionami.

Bukiet 7

1. W każdym z przypadków a), b), c), rozważ kilka przykładów liczb czterocyfrowych i spróbuj cyfry szukanej różnicy wyrazić przez A, B, C, D .
2. Wykorzystaj to, że cyfry liczby $EFGH$ są wyrażone przez A, B, C, D .
3. Oblicz różnice $ABCDE - EDCBA$ i $ABCDEF - FEDCBA$ jak w zadaniu 1, a następnie sumy jak w zadaniu 2.

Bukiet 8

1. Zaczynij tak jak w podanych przykładach: $1 + \dots, 2 + \dots, \dots$
2. Jeśli pierwszym składnikiem jest np. 1, to jaka jest suma dwóch pozostałych składników?
3. Rozważ oddzielnie przypadki, gdy pierwszym składnikiem jest: 1, 2, 3, \dots

Bukiet 9

1. Gdy masz już obliczone na przykład 7^3 , to 7^4 nie musisz liczyć od początku.
2. Jak najprościej obliczyć 7^8 , gdy znasz 7^4 ? Jak potem obliczyć 7^{12} ?
3. Jeśli zastanawiasz się nad cyfrą jednościami liczby 7^{2000} , to spójrz na zadanie 2. Jeśli znasz już cyfrę jednościami liczby 7^{2000} i zastanawiasz się nad cyfrą jednościami liczby 7^{2003} , to spójrz na zadanie 1.

Bukiet 10

1. Szukaj dwóch kolejnych liczb naturalnych, których sumy cyfr nie różnią się o 1.
2. W zadaniu 1 znalazłeś taką liczbę A , że liczba $A + 1$ nie ma sumy cyfr o 1 większej. Jak zmienić liczbę A , żeby liczba $A + 1$ nie miała również sumy cyfr o 8 mniejszej?
3. Szukaj dalej jak w zadaniach 1 i 2.

Bukiet 11

1. Jakie są możliwe liczby jednogroszówek?
2. Jakie są możliwe liczby jednogroszówek? Uzupełnij je dziesięciogroszówkami do pełnej złotówki. Resztę trzeba rozmiąć na dziesięciogroszówki i złotówki.
3. Jaka własność mają liczby z zadania 1?

Bukiet 12

1. Jaka jest najkrótsza droga z A do B ?
2. Symetria.
3. Skorzystaj z zadań 1 i 2.

Bukiet 13

1. Trójkąty o równych podstawach i wysokościach mają równe pola.
2. Podziel czworokąt $AKCM$ na dwa trójkąty.
3. Jaką część pola czworokąta $ABCD$ stanowi pole czworokąta $AKCM$?

Bukiet 14

2. Pogrupuj składniki tak, by skorzystać z zadania 1.
3. Najpierw oblicz sumy $1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots$

Bukiet 15

2. Sprawdź kolejne wielokrotności liczby 12.
3. Przyjrzyj się uważnie rozkłodom na czynniki pierwsze dzielników liczb znalezionych w zadaniu 2.