Bukiety matematyczne dla gimnazjum

`http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/`

1 X 2002 *Bukiet I*

Dany jest prostokąt o bokach wymiernych a, b, którego obwód O i pole P są całkowite.

1. Sprawdź, że zachodzi równość

$$a^2 = a \cdot \tfrac{O}{2} - P. \qquad (\star)$$

2. Załóżmy, że a jest przedstawione w postaci nieskracalnej $\frac{k}{l}$. Co możemy powiedzieć o mianownikach obu stron równości $(\star)$?

3. Uzasadnij, że jeżeli jedna z liczb a, b nie jest całkowita, to jest połową liczby nieparzystej, a druga liczba jest wówczas całkowita i parzysta.

15 X 2002 *Bukiet 2*

1. Oblicz

$$(2+\sqrt{2}) \cdot (2-\sqrt{2}).$$

2. Oblicz

$$(2+\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) \cdot (2-\sqrt{2+\sqrt{2}}).$$

3. Oblicz

$$(2+\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) \cdot (2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}) \cdot (2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}).$$

29 X 2002 *Bukiet 3*

1. Znajdź:
a) najmniejszą, b) największą
liczbę postaci

$$\frac{ABC}{7},$$

gdzie ABC jest liczbą trzycyfrową.

2. Które liczby naturalne można przedstawić w postaci

$$\frac{ABC}{7},$$

gdzie ABC jest liczbą trzycyfrową?

3. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7?

12 XI 2002 *Bukiet 4*

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Niech

$$|AB| = a,\ |BC| = b,\ |CD| = c,\ |DA| = d,\ |AC| = e,\ |BD| = f.$$

1. Korzystając z podobieństwa trójkątów, wyznacz odcinki długości x, y, spełniające warunki

$$\frac{a}{e} = \frac{x}{c} \quad \text{i} \quad \frac{d}{e} = \frac{y}{b}.$$

2. Wykaż, że $ac + bd = ef$.

3. Udowodnij, że jeżeli punkt P leży na łuku AB okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC, to

$$|PA| + |PB| = |PC|.$$

26 XI 2002 *Bukiet 5*

Udowodnij, że jeśli $a + b + c = 0$, to:

1. $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$;

2. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;

3.

$$\frac{a^3}{b^2c^2} + \frac{b^3}{c^2a^2} + \frac{c^3}{a^2b^2} = -5 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

10 XII 2002 *Bukiet 6*

1. Znajdź reszty z dzielenia przez 7 następujących liczb:

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ 111111.$$

2. Wykaż, że jeśli n jest podzielne przez 6, to liczba

$$\underbrace{11\ldots11}_{n}$$

jest podzielna przez 7.

3. Wyznacz reszty z dzielenia przez 7 liczb postaci

$$\underbrace{11\ldots11}_{n}$$

w zależności od n.

5 I 2003 *Bukiet 7*

1. Podziel prostokąt na trójkąty prostokątne, z których żadne dwa nie są podobne.

2. Podziel:

a) część płaszczyzny zawartą między dwiema prostymi równoległymi,

b) całą płaszczyznę

na prostokąty, z których żadne dwa nie są podobne.

3. Czy można podzielić płaszczyznę na trójkąty prostokątne, z których żadne dwa nie są podobne?

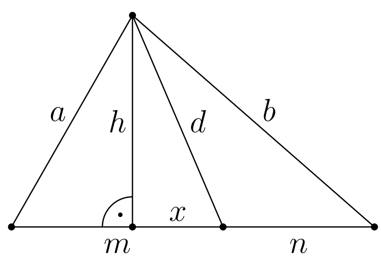
21 I 2003 *Bukiet 8*

1. Uzasadnij, że każda liczba pierwsza większa od 3 daje przy dzieleniu przez 6 resztę 1 lub 5.

2. Jaką resztę przy dzieleniu przez 30 może dać liczba, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 lub 5? Znajdź wszystkie możliwości.

3. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby pierwszej przez 30 jest liczbą pierwszą.

4 II 2003 *Bukiet 9*



1. Wskaż na rysunku trzy trójkąty prostokątne i dla każdego z nich napisz twierdzenie Pitagorasa.

2. Z otrzymanych równości wyprowadź równość, która nie zawiera h ani x.

3. Napisz wzór na d, gdy dane są a, b, m, n.

18 II 2003 *Bukiet 10*

Niech $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ będą liczbami dodatnimi takimi, że

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1.$$

1. Pokaż, że dla dowolnych liczb x, y zachodzi nierówność

$$x \cdot y \leqslant \frac{(x+y)^2}{4}.$$

2. Zastosuj powyższą nierówność do liczb $x = a_1 + a_3 + a_5$ i $y = a_2 + a_4 + a_6$.

3. Uzasadnij nierówność

$$a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_5 + a_5 \cdot a_6 + a_6 \cdot a_1 < \frac{1}{4}.$$

11 III 2003 *Bukiet 11*

1. Danych jest siedem takich liczb całkowitych, że pewne cztery z nich dają przy dzieleniu przez 4 cztery różne reszty. Wykaż, że suma pewnych czterech z danych liczb jest podzielna przez 4.

2. Dane są takie liczby całkowite, że suma żadnych czterech z nich nie jest podzielna przez 4. Uzasadnij, że wśród danych liczb jest:

a) co najwyżej jedna liczba podzielna przez 4 lub co najwyżej jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 4 resztę 2;

b) co najwyżej jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 4 resztę 1 lub co najwyżej jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 4 resztę 3.

3. Wykaż, że z dowolnych siedmiu liczb całkowitych można wybrać cztery, których suma jest podzielna przez 4.

25 III 2003 *Bukiet 12*

1. Wykaż, że jeżeli suma pierwiastków dwóch dodatnich liczb wymiernych jest liczbą wymierną, to ich iloczyn też jest liczbą wymierną.

2. Udowodnij, że jeżeli iloczyn dwóch liczb niewymiernych, będących pierwiastkami dodatnich liczb wymiernych, jest liczbą wymierną, to ich suma jest liczbą niewymierną.

3. Kiedy suma pierwiastków dwóch dodatnich liczb wymiernych jest liczbą wymierną?

8 IV 2003 *Bukiet 13*

1. A mówi: „B kłamie", B mówi: „C kłamie", C mówi: „A kłamie". Kto mówi prawdę, a kto kłamie?

2. Każda z osób A, B, C, D albo zawsze mówi prawdę, albo zawsze kłamie.

A mówi: „B kłamie", B mówi: „C kłamie", C mówi: „D kłamie", D mówi: „A kłamie".

Uzupełnij następujące wypowiedzi.

A mówi: „C …", B mówi: „D …"

3. A_1 mówi: „A_2 kłamie", A_2 mówi: „A_3 kłamie", …, A_{n-1} mówi: „A_n kłamie", A_n mówi: „A_1 kłamie".

a) Wykaż, że n jest liczbą parzystą.

b) Kto mówi prawdę, a kto kłamie?

22 IV 2003 *Bukiet 14*

W pola kwadratowej tablicy $n \times n$ (gdzie $n = 3, 4, 5$) chcemy wpisać liczby w ten sposób, by suma liczb stojących w rogach dowolnego kwadratu $k \times k$ (dla $k \geqslant 2$) była równa 0. Takie ustawienie nazywamy *dobrym.*

1. Jakie warunki powinny spełniać liczby a, b, c, d, e, by w kwadracie 3×3 istniało *dobre* ustawienie z tymi liczbami w następujących polach?

a	b	c
d		
e		

2. Opisz wszystkie *dobre* ustawienia w kwadracie 4×4.

3. Wykaż, że jeżeli ustawienie liczb w kwadracie 5×5 jest *dobre*, to w rogach tego kwadratu stoją zera.

13 V 2003 *Bukiet 15*

Niech a i b będą liczbami całkowitymi. Uzasadnij, że:

1. jeżeli liczba $5a + b$ dzieli się przez 7, to liczby $10a + 2b$ i $3a + 2b$ też dzielą się przez 7;

2. jeżeli liczba $a + 3b$ dzieli się przez 11, to liczba $b + 4a$ też dzieli się przez 11;

3. jeżeli liczba $3a + 4b$ dzieli się przez 17, to liczba $5a + b$ też dzieli się przez 17.

Wskazówki do zadań

Bukiet 1

1. Wyraź O i P przez a i b.

2. Przedstaw prawą stronę równości $(\star)$ w postaci ułamka.

3. Jeśli obie strony równości $(\star)$ przedstawimy w postaci nieskracalnej, to mianowniki po obu stronach muszą być równe.

Bukiet 2

1. Czemu jest równe $(a - b) \cdot (a + b)$?

2. Najpierw wymnóż drugi i trzeci nawias.

3. Najpierw wymnóż ostatnie dwa nawiasy.

Bukiet 3

1. Jaka jest najmniejsza, a jaka największa, liczba trzycyfrowa?

2. Jaka jest najmniejsza, a jaka największa, liczba naturalna postaci $\frac{ABC}{7}$? Skorzystaj z zadania 1.

3. Policz liczby z zadania 2.

Bukiet 4

1. Znajdź taki punkt E, by trójkąty ABC i DEC były podobne. Co możesz powiedzieć o trójkątach ADC i BEC?

2. Oblicz ac i bd korzystając z zadania 1.

3. Rozważ czworokąt $ACBP$.

Bukiet 5

1. Oblicz $(a + b + c)^2$.

2. Oblicz $(a + b)^3$.

3. Oblicz $(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)$.

Bukiet 6

2. Zauważ, że z danej liczby można wyłączyć czynnik 111111.

3. Spróbuj "obciąć" liczbę jedynek podzielną przez 6.

Bukiet 7

1. Wystarczy odpowiednio obciąć rogi.

2. Łatwo podzielić na kwadraty.

3. Nie wystarczy skorzystać z zadań 1 i 2. Trzeba jeszcze się upewnić, czy trójkąty z różnych prostokątów podziału nie są podobne.

Bukiet 8

1. Czy liczba pierwsza większa od 3 może być podzielna przez 2 lub przez 3?

2. Jeśli interesuje nas reszta z dzielenia przez 30 liczb postaci $6k + r$, to powinniśmy rozważyć możliwe przedstawienia: $k = 5l$, $k = 5l + 1$, …, $k = 5l + 4$.

3. Skorzystaj z zadań 1 i 2. Pamiętaj, że w zadaniu 1 mowa była jedynie o liczbach pierwszych większych od 3.

Bukiet 9

2. Najpierw uporaj się z $x^2 + h^2$. Potem wystarczy tylko pozbyć się x.

3. Wykorzystaj równość otrzymaną w zadaniu 2.

Bukiet 10

1. Wszystko na jedną stronę.

2. Zwróć uwagę na $x + y$.

3. Wystarczy skorzystać z nierówności otrzymanej w zadaniu 2.

Bukiet 11

1. Masz liczby dające reszty $0, 1, 2, 3$. Jeśli wśród pozostałych trzech liczb jest liczba dająca resztę 1, 2 lub 3, to jest O.K. Jeśli nie, to też jest O.K.

2. a) Gdyby wśród danych liczb była więcej niż jedna podzielna przez 4 i więcej niż jedna dająca resztę 2, to ...

b) Analogicznie.

3. Przypuśćmy, że z pewnych siedmiu liczb całkowitych nie można wybrać czterech, których suma jest podzielna przez 4. Co wynika z zadań 1 i 2?

Bukiet 12

1. Podnieś tę sumę do kwadratu.

2. Wyraź jeden pierwiastek przez drugi i oblicz sumę.

3. Co wynika z zadań 1 i 2?

Bukiet 13

Uwaga. Zdania odwołujące się wzajemnie do swojej prawdziwości są dość niebezpieczne po względem logicznym. Najprostsze przykłady to zdania „Ja kłamię”, czyli „To zdanie jest fałszywe” i „Ja mówię prawdę”, czyli „To zdanie jest prawdziwe”.

1. Rozważ dwie możliwości: A mówi prawdę, A kłamie.

2. A mówi, że nieprawdziwe jest to, co mówi B.

3. Gdyby n było liczbą nieparzystą, to mielibyśmy następującą sytuację. A_1 mówi: „A_3 …”, A_3 mówi: „A_5 …”, … A_{n-4} mówi: „A_{n-2} …”, A_{n-2} mówi: „A_n …”.

Bukiet 14

1. Uzupełnij po kolei wolne pola. Prawy dolny róg całego kwadratu jest też rogiem kwadratu 2×2.

2. Korzystając z zadania 1, uzupełnij kwadrat 3×3 zaczynając od liczb a, b, c, d. Następnie rozważ pozostałe kwadraty 3×3 w danym kwadracie 4×4.

3. Kwadrat 4×4 uzupełnij jak w zadaniu 2 i rozważ pozostałe kwadraty 4×4 znajdujące się w danym kwadracie 5×5.

Bukiet 15

1. Jak z liczby $5a + b$ otrzymać liczbę $10a + 2b$? Jak z liczby $10a + 2b$ otrzymać liczbę $3a + 2b$?

2. Spróbuj najpierw otrzymać liczbę postaci $4a + \ldots$

3. Liczbę $3a + 4b$ pomnóż przez 4.